



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Vom Fachbereich Physik

der Technischen Universität Darmstadt

zur Erlangung des Grades

eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation von

Dipl. Phys. Walter Brett

aus Frankfurt

Referent: Prof. Dr. W. Ellermeier

Korreferent: Prof. Dr. P. Mulser

Tag der Einreichung: 07.07.2014

Tag der mündlichen Prüfung: 21.07.2014

Darmstadt 2014

D17

Schriftliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende
Dissertation selbstständig verfasst und ausschließ-
lich die in der Arbeit angegebenen Hilfsmittel
und Quellen verwendet habe.

Ich versichere weiterhin,
dass dies mein erster Promotionsversuch ist
und die Arbeit bisher noch nicht
veröffentlicht worden ist.

Ort, Datum

Unterschrift

Summary

In the presented work the Kelvin-Helmholtz-Instability in magnetohydrodynamic flows is analyzed with the methods of Multiple Scales. The concerned fluids are incompressible or have a varying density perpendicular to the vortex sheet, which is taken into account using a Boussinesq-Approximation and constant Brunt-Väisälä-Frequencies.

The Multiple Scale Analysis leads to nonlinear evolution equations for the amplitude of the perturbations. Special solutions to these equations are presented and the effects of the magnetic fields are discussed.

Inhaltsverzeichnis

0.1	Einleitung	7
1	Magnetohydrodynamik	13
1.1	Die Gleichungen der Strömungsmechanik	14
1.2	Die Gleichungen der Elektrodynamik	18
1.3	Die Gleichungen der Magnetohydrodynamik	20
2	Sprungbedingungen	25
2.1	Die Reynolds'schen Transporttheoreme	26
2.2	Die kinematische Übergangsbedingung	28
2.3	Die dynamische Übergangsbedingung	29
2.4	Die elektromagnetischen Übergangs- bedingungen	29
3	Die magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz-Instabilität dichte- beständiger Fluide	33
3.1	Lineare Stabilitätsanalyse	37
3.1.1	Trennflächenladung und Trennflächenstrom	50
3.2	Multiple Skalen Analyse - Evolutionsgleichungen	52
3.3	Störungstheorie zweiter Ordnung	53
3.4	Störungstheorie dritter Ordnung	58
3.5	Nichtlineare Stabilitätsanalyse	65
3.5.1	Linear stabile Wellen	66
3.5.2	Linear marginal stabile Wellen $\kappa \neq \kappa_c$	75
3.5.3	Linear marginal stabile Wellen bei $\kappa = \kappa_c$	78
4	Magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz-Instabilität zwei- er Fluide in Boussinesq-Näherung	85
4.1	Boussinesq-Alfvénwellen	88
4.2	Lineare Stabilitätsanalyse	94
4.3	Störungstheorie zweiter Ordnung	102
4.4	Störungstheorie dritter Ordnung	109
4.5	Nichtlineare Stabilitätsanalyse	113
5	Zusammenfassung und Ausblick	123
5.1	Zusammenfassung	123
5.2	Ausblick	124

A Sprungbedingungen	127
A.1 Die mechanischen Übergangsbedingungen	127
A.2 Die elektromagnetischen Übergangsbedingungen	133
B Die Feldgrößen der Teilströmungen	137
B.1 Feldgleichungen dichtebeständiger Fluide	137
B.2 Die Feldgrößen der inkompressiblen Teilströmungen	140
B.3 Die Feldgrößen für Teilströmungen in Boussinesq-Näherung . . .	144
Symbolverzeichnis	149
Literaturverzeichnis	151

0.1 Einleitung

Unter den überlieferten Lebensweisheiten der Antike findet man den Heraklit zugesprochenen Aphorismus *Panta rhei*. - zu deutsch: *Alles fließt* [85]. Dieser kurze Satz fasst den philosophischen Gedanken vom stetigen Wandel aller Dinge in der Welt prägnant zusammen.

Eine der literarischen Quellen ist Platons Werk *Kratylos* [67]. In diesem fiktiven Gespräch diskutieren Sokrates, Kratylos und Hermogenes über die Herkunft der Wortbedeutungen. Sokrates erinnert seine Dialogpartner an die Lehren des Heraklit, um den Wandel der Wortbedeutungen zu verdeutlichen:

„Sokrates: *Herakleitos sagt doch, daß alles davongeht und nichts bleibt, und indem er alles Seiende einem strömenden Flusse vergleicht, sagt er, man könne nicht zweimal in denselben Fluß steigen.*“

Der strömende Fluss, ein sich bewegendes Fluid, steht hier als Sinnbild für Veränderung und Wandel.

In den modernen Naturwissenschaften ist die Strömungsmechanik das Teilgebiet der Physik, in dem das Verhalten von Fluiden untersucht wird. Im Gegensatz zu der antiken Vorstellung von der sich ständig ändernden Strömung gibt es Modelle von Strömungszuständen, die gegenüber angreifenden äußeren Kräften stabil sind. Sie ändern sich im Laufe der Zeit nicht.

Die Untersuchung der Stabilität geometrisch einfacher Strömungssysteme ist von besonderem Interesse, da die zugrunde liegenden Gleichungen analytisch gelöst werden und einfache Gesetze abgeleitet werden können.

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität ([40], [31]), benannt nach den Wissenschaftlern, die sie als erstes untersuchten, beschreibt das Anwachsen infinitesimal kleiner Störungen der Trennfläche zwischen zwei dichtebeständigen, rotationsfreien Parallelströmungen unterschiedlicher Geschwindigkeiten. In Abbildung (1) sind die Strömungsverhältnisse für zwei Raumdimensionen skizziert:

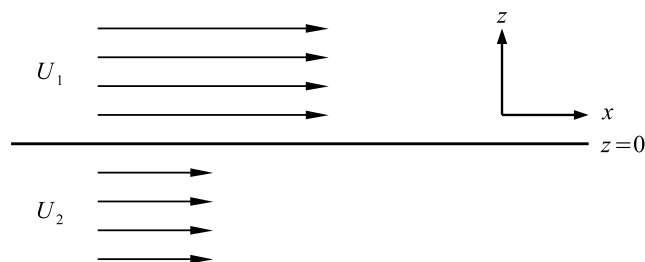


Abbildung 1: Kelvin-Helmholtz-Instabilität, Grundzustand

Die Teilströmungen fließen stationär in den Halbräumen $z > 0$ und $z < 0$ mit den Geschwindigkeiten U_1 bzw. U_2 in x -Richtung. Dieser Grundzustand erfüllt die strömungsmechanischen Gleichungen der Teilströmungen und die Übergangsbedingungen an der ebenen Trennfläche $z = 0$. Um die Stabilität dieses Strömungszustands zu untersuchen, läßt man die Trennfläche kleine Wellenbewegungen $s_1(x, t) = S_1 e^{i(kx - \omega t)} + c.c.$ mit Wellenzahl k , Kreisfrequenz ω und hinreichend kleiner Amplitude S_1 ausführen. Die hinreichend klein gewählte

Amplitude erlaubt es, die Gleichungen zu linearisieren. Über die Übergangsbedingungen an der Trennfläche erhält man eine Dispersionsrelation $\omega(k)$ für die Wellenbewegung.

Ohne weitere stabilisierende Effekte wird ein Lösungsast von ω bei einer noch so kleinen Geschwindigkeitsdifferenz $U_2 - U_1 \neq 0$ für alle reellen k komplex mit positivem Imaginärteil und die anfänglich infinitesimale Störung wächst exponentiell in der Zeit an.

Erweitert man das Modell durch stabilisierende Effekte wie einer Oberflächenspannung zwischen beiden Teilströmungen und einer vertikal wirkenden Schwerkraft, wobei für einen stabilisierenden Effekt der Schwerkraft die Dichte des unteren Fluids größer als die obere sein muss, gibt es für bestimmte Parameter ausschließlich rein reelle $\omega(k)$ und somit eine stabile Wellenausbreitung.

In diesem Fall ist durch die Dispersionsrelation eine Kurve festgelegt, die den instabilen vom stabilen Bereich trennt. Diese Neutralitätskurve für die Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Oberflächenspannung und Schwerkraft ist in Abbildung (2) zu sehen. Das Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz $(U_2 - U_1)^2$ ist über der Wellenzahl k aufgetragen. Punkte unterhalb der Kurve liegen im stabilen, Punkte oberhalb der Kurve im instabilen Bereich. Links des Minimums bei k_c überwiegt die Schwerkraft als stabilisierender Effekt, rechts des Minimums die Oberflächenspannung. In diesen Bereichen können größere Geschwindigkeitsdifferenzen gewählt werden, die Strömung bleibt für die jeweiligen k stabil.

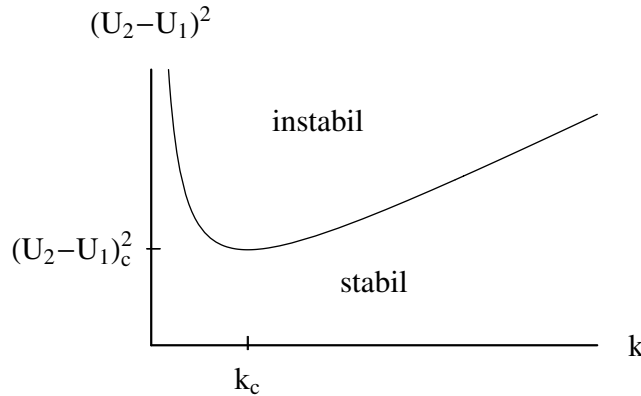


Abbildung 2: Neutralitätskurve der Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Schwerkraft und Oberflächenspannung

Ist die Geschwindigkeitsdifferenz nun geringer als die kritische $(U_2 - U_1)_c^2$, dann ist die Strömung für jedes k stabil. Diese lineare Stabilitätsanalyse ist gültig für infinitesimal kleine Anfangsstörungen. Ist die Anfangsstörung klein, aber endlich oder wächst die Amplitude in der Umgebung der Neutralitätskurve langsam an, kann man die nichtlinearen Terme der zugrundeliegenden Gleichungen nicht mehr vernachlässigen.

Weissman [82] hat in einem Übersichtsartikel die nichtlinearen Feldgleichungen und Übergangsbedingungen bis zur dritten Ordnung eines Entwicklungsparameters ε entwickelt. Unter der Annahme, dass die Amplitude S_1 auf langsamen Skalen zeit- und ortsabhängig ist, stellte er nichtlineare Evolutionsgleichungen für S_1 auf. Weissman hat diese Untersuchung für drei ausgezeichnete Bereiche

durchgeführt: Für linear stabile Wellen weit unterhalb der Neutralitätskurve und für marginal stabile Wellen in der Umgebung der Neutralitätskurve und speziell in der Nähe des Minimums bei k_c .

Neben der nichtlinearen Entwicklung wurde die Kelvin-Helmholtz-Instabilität auch in anderen Kontexten untersucht und die lineare Theorie erweitert. Unter den zahlreichen Veröffentlichungen seien an dieser Stelle drei genannt:

Landau [42] zeigte 1944, dass für zwei Raumdimensionen eine tangential Discontinuität der Geschwindigkeit zwischen zwei kompressiblen Fluiden im Gegensatz zu dichtebeständigen Fluiden bei genügend hoher Geschwindigkeitsdifferenz stabil gegenüber infinitesimalen Störungen wird.

Chandrasekhar hat in seinem Buch [15] die Kelvin-Helmholtz-Instabilität in zwei Raumdimensionen in magnetohydrodynamischen Strömungen untersucht und gezeigt, dass ein parallel zur Trennfläche gelegtes Magnetfeld die Strömung stabilisiert. Ein in der Trennfläche fließender Flächenstrom wirkt zusammen mit der magnetischen Induktion als Lorentzkraft senkrecht zur Wirbelschicht.

Acheson [1] untersuchte die Reflexion von Wellen an einer Trennfläche zwischen zwei magnetohydrodynamischen Parallelströmungen, deren Massendichte über der Höhe z in bestimmter Weise abnimmt. Er beschränkte sich nach Anwendung der Boussinesq-Näherung auf konstante positive Brunt-Väisälä-Frequenzen und analysierte die Stabilität und Überreflexion spezieller Lösungen.

In der vorliegenden Dissertation werden schwach nichtlineare Effekte der Kelvin-Helmholtz-Instabilität sowohl für dichtebeständige als auch für inkompressible Fluide mit konstanten Brunt-Väisälä-Frequenzen in magnetohydrodynamischen Strömungen mit Multipler Skalen Analyse untersucht.

Zunächst werden die Herleitungen der magnetohydrodynamischen Gleichungen aus der Kontinuumsmechanik und der Elektrodynamik im Kapitel 1 für dichtebeständige Fluide und für solche mit Massendichtegradienten vorgestellt. Das anschließende Kapitel ist den Übergangsbedingungen an der Trennfläche gewidmet. Neben der kinematischen und dynamischen Übergangsbedingung gibt es für das elektromagnetische Feld ebenfalls Übergangsbedingungen für eine frei bewegliche Trennfläche. In der veröffentlichten Literatur werden diese oft vernachlässigt, nicht klar formuliert oder sind sogar fehlerhaft.

In Kapitel 3 wird die Stabilitätsanalyse für dichtebeständige magnetohydrodynamische Fluide durchgeführt, die in 3.1 mit der linearen Analyse inklusive der Übergangsbedingungen in allen drei Raumrichtungen beginnt.

Chandrasekhar und Acheson behandelten ebene Probleme, bei denen die betrachteten Magnetfelder und die Geschwindigkeiten der Parallelströmungen im Grundzustand in die gleiche Richtung zeigen. Im allgemeinen können die Magnetfelder und Geschwindigkeiten in beliebiger Richtung in der xy -Ebene liegen. In 3.3 und 3.4 werden die allgemeinen Evolutionsgleichungen für drei Raumdimensionen aus der Multiplen Skalen Analyse ermittelt. Im Unterkapitel 3.5 werden einige Lösungen der Gleichungen für die drei Bereiche vorgestellt und die Wirkung der Magnetfelder auf die Stabilität diskutiert. Die nichtlinearen Gleichungen erlauben eine Vielzahl an Lösungen und der Einfluss der Magnet-

felder ist sehr komplex.

Im Kapitel 4 erfolgt die Stabilitätsanalyse für Fluide mit Massendichtegradienten und konstanten Brunt-Väisälä-Frequenzen in zwei Raumdimensionen. In den Unterkapiteln 4.1 und 4.2 wird auf das spezielle Ausbreitungsverhalten der Störungen in den Teilströmungen eingegangen und die lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Das Ausbreitungsverhalten unterscheidet sich wesentlich von dem in dichtebeständigen Fluiden. Das Aufstellen der Evolutionsgleichungen in den Unterkapiteln 4.3 und 4.4 muss diesem Verhalten gerecht werden. Im Abschnitt 4.5 wird die erhaltene Evolutionsgleichung für linear stabile Wellen auf Stabilität untersucht.

In Kapitel 5 werden die wesentlichen Erkenntnisse zusammengefasst und einige Vorschläge für weitere Analysen der Kelvin-Helmholtz-Instabilität gegeben. Im Anhang findet der Leser alle wichtigen Größen in kartesischen Koordinaten berechnet.

Ich danke meinem Doktorvater Herrn Prof. Wolfgang Ellermeier für die vielen anregenden und erheiternden Diskussionen und meiner lieben Frau Natali für ihr Verständnis. Weiterhin möchte ich mich bei Herr Prof. Peter Mulser für sein Korreferat bedanken.

Die Einleitung schließt mit einer erweiterten Literaturübersicht ab.

Gerwin [29] hat einen Übersichtsartikel über die Kelvin-Helmholtz-Instabilität kompressibler und inkompressibler Fluide in nichtleitenden und magnetohydrodynamischen Fluiden geschrieben.

Fejer und Miles [23] zeigten, dass die Kelvin-Helmholtz-Instabilität kompressibler Fluide instabil gegenüber bestimmten dreidimensionalen Störungen ist.

Lindzen [48] untersuchte die Kelvin-Helmholtz-Instabilität in geschichteten Strömungen mit konstanter Brunt-Väisälä-Frequenz.

Miles beschäftigte sich in seinen Arbeiten [58],[59] und [60] mit der Erzeugung von Oberflächenwellen durch Scherströmungen. In [60] wird die Kelvin-Helmholtz-Instabilität eines leichten reibungsfreien Fluids über einem schweren zähen Fluid untersucht. Die vorgegebene Geschwindigkeit kann von der Höhe abhängen.

Über die Kelvin-Helmholtz-Instabilität in der Magnetohydrodynamik sind bis heute zahlreiche Publikationen erschienen. Michael [57] leitete eine Stabilitätsbedingung für inkompressible Fluide ohne Oberflächenspannung und Schwerkraft in zwei Raumdimensionen her. Ergänzungen zur linearisierten Theorie dichtebeständiger Fluide findet man beispielsweise bei Axford [8],[9].

Alterman [3], [4] untersuchte die Kelvin-Helmholtz Instabilität zwischen zwei rotierenden Fluiden. Sen [71] stellte Stabilitätskriterien für das volle dreidimensionale Problem vor.

Ong und Roderick [65] untersuchten den Einfluss einer endlichen Schichtdicke der Trennfläche, in der die Geschwindigkeit linear anwächst.

Zur linearisierten Theorie magnetohydrodynamischer kompressibler Fluide wird man bei Fejer [22], Sen [72] und Southwood [74] fündig. Erwähnenswert ist hier die Veröffentlichung von Kirtskhalia [39], die die Diskrepanzen zwischen den verschiedenen Arbeiten auf eine fehlerhafte Behandlung der Dispersionsrelation zurückführt, die auf unphysikalische Lösungen führt. Pu und Kivelson [68] präsentieren spezielle exakte lineare Lösungen.

Gerwin [28] untersuchte hydromagnetische Oberflächenwellen an der Grenzfläche einer leitenden Flüssigkeit und eines Gases.

In den bisher genannten Arbeiten sind die Übergangsbedingungen nicht vollständig beschrieben worden.

Melcher [56] untersuchte in einer linearisierten Theorie elektro- und magnetohydrodynamische Oberflächenwellen zwischen zwei ruhenden Fluiden in einem beschränkten System. Die elektromagnetischen Übergangsbedingungen wurden berücksichtigt und die Auswirkungen elektrischer Oberflächenladungen und Oberflächenströme diskutiert, die Größen jedoch nicht ausgerechnet.

Auch Kruskal und Schwarzschild [41] haben bei ihrer Stabilitätsanalyse eines ruhenden vollständig ionisierten Plasmas in einem Schwerfeld über Vakuum alle Übergangsbedingungen berücksichtigt. Northrop [64] führte diese Analyse an einem bewegten Plasma durch.

Bekannte Arbeiten über die nichtlineare Kelvin-Helmholtz-Instabilität wurden von Drazin [19], Nayfeh und Saric [61],[62] oder Maslowe und Kelly [53] veröffentlicht.

Zur nichtlinearen Entwicklung der magnetohydrodynamischen Kelvin-Helmholtz-Instabilität gibt es folgende Publikationen: Kant und Malik [33], Malik und Singh [51] und Singh, Khosla und Malik [73] untersuchten spezielle Lösungen der Evolutionsgleichungen auf Stabilität und untersuchten die Wirkung der Magnetfelder. Khater, Callebaut und Seadawy [36] berechneten weitere spezielle Lösungen der magnetohydrodynamischen Kelvin-Helmholtz-Instabilität.

Bei den letztgenannten nichtlinearen Entwicklungen war der Grundzustand der Strömung stets durch parallele Geschwindigkeiten und Magnetfelder gegeben. Da in dieser Arbeit der allgemeinste Grundzustand angenommen wird, können allgemeinere Gleichungen aufgestellt werden und bisher nicht betrachtete Lösungen analysiert werden.

Soweit mir bekannt ist, wurde die nichtlineare Stabilitätsanalyse für magnetohydrodynamische Strömungen in Boussinesq-Näherung noch nicht durchgeführt.

Kapitel 1

Magnetohydrodynamik

Die dieser Arbeit zugrunde liegende Theorie ist die Magnetohydrodynamik. Sie beschreibt in kontinuumsphysikalischer Weise die Dynamik von elektrisch leitfähigen Fluiden unter Einwirkung eines Magnetfelds.

In der Magnetohydrodynamik (MHD) als Teilgebiet der Plasmaphysik werden die Gleichungen der Strömungsmechanik und der Elektrodynamik in konsistenter Weise miteinander verknüpft [49]. Dabei werden Näherungen verwendet, die die Gültigkeit der daraus entstehenden Gleichungen einschränken [80].

Die Elektrodynamik ist eine relativistische Theorie. Die Maxwellgleichungen sind invariant unter Lorentz-Transformation. Die übliche Form der Gleichungen der Strömungsmechanik ist unter Galilei-Transformation invariant. Da alle auftretenden Geschwindigkeiten, insbesondere die Strömungsgeschwindigkeiten, gegenüber der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum als klein angenommen werden, werden die Maxwellgleichungen durch Beachtung entsprechender Transformationsformeln für die elektromagnetischen Feldgrößen an das Transformationsverhalten der Strömungsgleichungen angepasst.

Im Unterkapitel über die elektrodynamischen Gleichungen wird gezeigt, dass die Vernachlässigung der zeitlichen Ableitung des Verschiebestroms \vec{D} im Ampereschen Gesetz aus dieser Überlegung folgt.

Mit dieser Näherung konsistent ist ein weiteres wesentliches Merkmal der Plasmaphysik: Die Quasi-Neutralität des Fluids.

Aus einem in der Plasmaphysik verwendeten Zweiflüssigkeitsmodell, welches von einer Elektronen- und einer Ionenflüssigkeit mit Wechselwirkung ausgeht, kann man unter Annahme der Quasi-Neutralität Gleichungen aufstellen, die das Verhalten des Plasmas durch ein einzelnes scheinbar elektrisch neutrales Fluid beschreibt. Elektronen und Ionen sind so angeordnet, dass in einem beliebigen Volumen ungefähr gleich viele positive wie negative elektrische Ladungen vorhanden sind.

Am Ende dieses Kapitels wird das Gleichungssystem der Magnetohydrodynamik vorgegestellt:

Eine Kontinuitätsgleichung und Impulsbilanz für das elektrisch leitende Fluid, eine Transportgleichung für die magnetische Induktion, die Induktionsgleichung, und das Ohmsche Gesetz. Die Kopplung der Gleichungen geschieht über die Lorentzkraft.

Die magnetische Induktion beeinflusst über die Lorentzkraft maßgeblich das Verhalten der Plasmaströmung. Das elektrische Feld spielt eine untergeordnete

Rolle, da die Kraftwirkung in der Impulsbilanz im Rahmen dieser Theorie vernachlässigt werden kann.

Die Magnetohydrodynamik hat sich in vielen Gebieten als nützlich erwiesen. Sie kann über einen sehr großen Massendichtebereich angewendet werden.

Alfvén [5] postulierte 1942 die Existenz von elektromagnetischen hydrodynamischen Wellen und brachte sie mit der Bewegung der Sonnenflecken in Verbindung. Experimentell nachgewiesen wurden sie an flüssigen Metallen [50]. Lehnert [45], [46] bestätigte die MHD an flüssigem Natrium und Quecksilber. Zur Beschreibung der Dynamik flüssiger Metalle [26] in der Metallurgie liefert die MHD ebenfalls wichtige Erkenntnisse [17].

Der interstellare Raum kann als Plasma sehr geringer Massendichte angesehen werden. Sie wird zur Beschreibung der Ionosphäre und Magnetosphäre der Erde verwendet; speziell dort tritt auch die magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz-Instabilität auf [74], [68], [65]. Auch zur Beschreibung der Entstehung des Erdmagnetfeldes infolge der Bewegung des flüssigen Erdkerns kann die MHD angewendet werden. Lehnert [47] untersuchte Wellenbewegungen innerhalb der Sonne. Im Laufe der Zeit haben sich die Modelle erweitert [55].

Die äußeren Schichten der Sonne sind ein weiteres Anwendungsgebiet. In einer im Jahre 2011 veröffentlichten Arbeit [24] haben Foullon, Verwichte, Nakariakov, Nykyri und Farrugia eine magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz-Instabilität in einem koronalen Massenauswurf der Sonne identifiziert. Die ausgewerteten Bilder stammen vom Satelliten *Solar Dynamics Observatory*, der die Ultraviolettstrahlung der Sonne misst und in Bilder umwandelt.

Masters et al. [54] berichten in einer Arbeit aus dem Jahr 2010 von den Beobachtungen der *Cassini*-Raumsonde. Die von der Raumsonde während ihres Eintritts in die Saturnatmosphäre gesammelten Daten sprechen für einen Kelvin-Helmholtz-Wirbel, der in der äußeren Magnetosphäre des Saturns entstanden ist.

In der vorliegenden Arbeit wird das SI-Einheitensystem verwendet.

1.1 Die Gleichungen der Strömungsmechanik

In der Kontinuumsmechanik wird der Zustand eines Fluids im allgemeinen durch die Bilanzen der Masse, des Impulses, des Drehimpulses, der Energie und der Entropie beschrieben [10],[75].

Für das Lösen einiger Strömungsprobleme genügt die Betrachtung der Massen- und Impulsbilanz. Das Gleichungssystem ist dann mit den Variablen Massendichte ρ und Geschwindigkeit \vec{v} geschlossen und lösbar. In diesem Fall ist der Druck p keine Funktion anderer thermodynamischer Zustandsgrößen, sondern ein Funktional der Bewegung.

Der Drehimpulsatz für nichtpolare Fluide fordert einen symmetrischen Cauchy-Spannungstensor. Es zeigt sich, dass der Maxwellspannungstensor der Magnetohydrodynamik diese Eigenschaft besitzt, so dass also in der MHD die Drallbilanz nicht gesondert berücksichtigt werden muss.

Die Energiebilanz kann für Energiebetrachtungen hinzugezogen werden, für das Lösen der Gleichungen ist sie nicht erforderlich. Die in dieser Arbeit betrachteten Fluide sind unendlich gut elektrisch leitfähig. Dann ist die Entropieerzeugung durch die Ohmsche Leitung vernachlässigbar und die Entropiebilanz ist trivialerweise erfüllt.

Für die Herleitung der magnetohydrodynamischen Strömungsgleichungen verwendet man die Massen- und Impulsbilanzen einer Elektronen- und Ionenflüssigkeit. Im Buch von Woods [81] ist die Herleitung in kompakter Weise durchgeführt worden. Im folgenden werden die wesentlichen Aspekte der quasi-neutralen Näherung vorgestellt.

In diesem Zweiflüssigkeitsmodell werden Elektronen und Ionen eines Plasmas als Mischung von Fluiden betrachtet.

Die Elektronen- und Ionenflüssigkeit werden durch jeweilige Massen-, Ladungs-, Impuls- und Stromdichten beschrieben. Die Indizes e und i stehen für die jeweiligen Größen der Elektronen- bzw. Ionenflüssigkeit. Die verschiedenen Dichten des zusammengesetzten Plasmas setzen sich aus der Summe der Partialdichten der beiden Konstituenten zusammen:

$$\text{Massendichte} \quad \rho = \rho_e + \rho_i, \quad (1.1)$$

$$\text{Ladungsdichte} \quad q\rho = q_e\rho_e + q_i\rho_i, \quad (1.2)$$

$$\text{Impulsdichte} \quad \rho\vec{v} = \rho_e\vec{v}_e + \rho_i\vec{v}_i, \quad (1.3)$$

$$\text{Stromdichte} \quad \vec{j} = q_e\rho_e\vec{v}_e + q_i\rho_i\vec{v}_i = \vec{j}_e + \vec{j}_i. \quad (1.4)$$

Die spezifischen Ladungen q_e und q_i sind Konstanten. Die spezifische Ladung für das Plasma q aber nicht. Nach (1.1) und (1.2) gilt:

$$q = \frac{q_e\rho_e + q_i\rho_i}{\rho_e + \rho_i}. \quad (1.5)$$

Die Geschwindigkeit \vec{v} wird als Massenmittelpunktschwindigkeit bezeichnet. Die Stromdichte \vec{j} setzt sich aus den Teilstromdichten der Elektronen und Ionen zusammen.

Die vier unabhängigen Größen $\rho_e, \rho_i, \vec{v}_e$ und \vec{v}_i der beiden Teilfluide werden auf die vier unabhängigen Größen des Plasmas ρ, q, \vec{v} und \vec{j} abgebildet.

Während die Stromdichten $q_e\rho_e\vec{v}_e$ und $q_i\rho_i\vec{v}_i$ proportional zu den Ladungsdichten $q_e\rho_e$ bzw. $q_i\rho_i$ sind, gilt das für das zusammengesetzte Fluid nicht mehr. Auch wenn die Ladungsdichte $q\rho$ verschwindet, kann eine Stromdichte $\vec{j} \neq 0$ existieren.

Mit den eingeführten Bezeichnungen kann man nun die Kontinuitätsgleichung und die Impulsbilanz der Mischung herleiten:

Herleitung der Kontinuitätsgleichung

Es wird angenommen, dass für Elektronen und Ionen lokale Erhaltungsgleichungen gelten. Ist die Ionisations-Rekombination zwischen Elektronen und Ionen vernachlässigbar, gilt für Elektronen- und Ionenflüssigkeit separat die jeweilige Massenerhaltung:

$$\dot{\rho}_e + \nabla \cdot (\rho_e \vec{v}_e) = 0, \quad (1.6)$$

$$\dot{\rho}_i + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0. \quad (1.7)$$

Die Addition beider Gleichungen führt unter Beachtung der neu eingeführten Größen (1.1) und (1.3) sofort auf die Kontinuitätsgleichung des zusammengesetzten Fluids:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.8)$$

Aus der Massenerhaltung der Elektronen- und Ionenflüssigkeit folgt die Ladungserhaltung der Mischung. Die Ladungsbilanz für die Teilfluide ergibt sich durch Multiplikation mit den spezifischen Ladungen:

$$q_e \dot{\rho}_e + q_e \nabla \cdot (\rho_e \vec{v}_e) = 0, \quad (1.9)$$

$$q_i \dot{\rho}_i + q_i \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = 0. \quad (1.10)$$

Die Addition der letzten beiden Gleichungen ergibt die Ladungserhaltung:

$$(\dot{q\rho}) + \nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.11)$$

Herleitung der Impulsbilanz

Für die Elektronen- und Ionenflüssigkeit gelten die folgenden Impulsbilanzen:

$$\rho_e (\partial_t + \vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e = -\nabla p_e + \rho_e q_e \left(\vec{E} + \vec{v}_e \times \vec{B} \right) + \rho_e \vec{g} - \rho_e \nu_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i), \quad (1.12)$$

$$\rho_i (\partial_t + \vec{v}_i \cdot \nabla) \vec{v}_i = -\nabla p_i + \rho_i q_i \left(\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B} \right) + \rho_i \vec{g} + \rho_e \nu_{ei} (\vec{v}_e - \vec{v}_i). \quad (1.13)$$

Auf jede der beiden Konstituenten wirkt ein Partialdruck, die Lorentzkraft und die Schwerkraft, realisiert durch die ersten drei Terme auf der rechten Seite. Die Elektronen und Ionen des Plasmas beeinflussen sich durch Elektronen-Ionen-Stöße gegenseitig. Diese Stöße werden in den Impulsbilanzen jeweils durch den letzten Term auf der rechten Seite modelliert. ν_{ei} ist die Stoßfrequenz zwischen Elektronen und Ionen. Je höher die Stoßfrequenz desto stärker ist die Kopplung zwischen den Fluiden. Elektronen-Ionen-Stöße finden nur statt, wenn sich die Geschwindigkeiten der beiden Flüssigkeiten unterscheiden.

Addiert man beide Impulsbilanzen und berücksichtigt die Definitionen von ρ (1.1) und \vec{v} (1.3), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \rho (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = & -\nabla (p_e + p_i) + q\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} + \rho \vec{g} \\ & + \nabla \cdot \{ \rho_e (\vec{v}_e - \vec{v}) \otimes (\vec{v}_e - \vec{v}) + \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}) \otimes (\vec{v}_i - \vec{v}) \}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Das dyadische Produkt \otimes ist durch [13]

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} \quad (1.15)$$

definiert. Nimmt man an, dass sich in einem kleinen Raumbereich Elektronen und Ionen aufgrund der elektrostatischen Anziehungskraft so anordnen, dass sich in diesem Gebiet gleich viele positive wie negative elektrische Ladungen befinden, so gilt:

$$q_i \rho_i \approx -q_e \rho_e. \quad (1.16)$$

Die elektrische Stromdichte des Plasmas kann somit nach (1.4) als

$$\vec{j} \approx q_e \rho_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i) \quad (1.17)$$

geschrieben werden.

Aus der Quasi-Neutralität folgt, dass sich in einem kleinen Raumbereich ungefähr gleich viele Elektronen wie Ionen befinden müssen. Die Massendichte der

Ionen ist wegen der Kleinheit der Elektronenmasse im Vergleich zur Ionenmasse also sehr viel größer als die Massendichte der Elektronen:

$$\rho_i \gg \rho_e. \quad (1.18)$$

Folglich ist die Massendichte des zusammengesetzten Plasmas größtenteils durch die Massendichte der Ionen gegeben:

$$\rho \approx \rho_i. \quad (1.19)$$

Für die Ionen- und Elektronengeschwindigkeit kann man nach (1.3) und (1.4) schreiben:

$$\vec{v}_i \approx \vec{v}, \quad (1.20)$$

$$\vec{v}_e \approx \vec{v} - \vec{j} \frac{1}{q_e \rho_e}. \quad (1.21)$$

Mit diesen Näherungen, die alle auf der Quasi-Neutralität des Plasmas beruhen, kann man die Terme, die von quadratischer Ordnung in den Diffusionsgeschwindigkeiten sind, vernachlässigen. Im Abschnitt über die Elektrodynamik wird gezeigt, dass man $q\rho\vec{E}$ im Vergleich mit $\vec{j} \times \vec{B}$ vernachlässigen kann. Aus der Summe der Impulsbilanzen der Elektronen und Ionen aus dem Zweiflüssigkeitsmodell (1.10) wird so die Impulsbilanz des elektrisch leitfähigen Fluids der Magneto-hydrodynamik:

$$\rho (\partial_t + \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \rho g. \quad (1.22)$$

Herleitung des Ohmschen Gesetzes

In der Impulsbilanz der Elektronen (1.13) stellt man den Wechselwirkungsterm mit Hilfe der genäherten Stromdichte (1.17) dar [81] und achtet darauf, dass der gleiche Vorfaktor wie bei der Lorentzkraft auftaucht:

$$\rho_e (\partial_t + \vec{v}_e \cdot \nabla) \vec{v}_e = -\nabla p_e + \rho_e q_e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) - \vec{j} \times \vec{B} + \rho_e g + q_e \rho_e \frac{\rho_e \nu_{ei}}{q_e^2 \rho_e^2} \vec{j}, \quad (1.23)$$

Der Vorfaktor, der im Bruch steht, besitzt die Struktur einer elektrischen Leitfähigkeit, wie sie zum Beispiel das Drude-Modell aus der Festkörperphysik für ein klassisches Elektronengas eines Metalls voraussagt [27]:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{\nu_{ei}}{q_e^2 \rho_e} = \frac{m_e \nu_{ei}}{n_e e^2}. \quad (1.24)$$

Dabei ist m_e die Masse und e die Elementarladung des Elektrons. Mit n_e wird die Anzahldichte der Elektronen bezeichnet. Der Hall-Effekt $\vec{j} \times \vec{B}$ wird vernachlässigt. Die Elektronenmasse ist so gering, dass man in guter Näherung die Trägheitskräfte gegenüber der Lorentzkraft und der Wechselwirkung vernachlässigen kann, so dass man das Ohmsche Gesetz erhält:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{j} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.25)$$

1.2 Die Gleichungen der Elektrodynamik

Die mechanischen Gleichungen enthalten elektromagnetische Feldgrößen. Deren Verhalten wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. In dieser Arbeit wird das Internationale Einheitensystem (SI) verwendet. Die Integraldarstellungen der Maxwellgleichungen lauten für dieses Einheitensystem [27]:

$$\oint_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (1.26)$$

$$\oint_{\partial V} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_V q\rho \, dV, \quad (1.27)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_A \vec{D} \cdot d\vec{A}, \quad (1.28)$$

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (1.29)$$

Die elektromagnetischen Materialgesetze verknüpfen das elektrische Feld \vec{E} mit der elektrischen Verschiebung \vec{D} sowie das Magnetfeld \vec{H} mit der magnetischen Induktion \vec{B} . Im allgemeinen sind die Materialgrößen ϵ und μ Tensoren 2. Stufe. Für ein isotropes Plasma genügt eine lineare Zuordnung mit den Skalaren μ und ϵ :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.30)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (1.31)$$

Das ist die einfachste mögliche Verknüpfung. Die Materialgesetze gelten nur für das Ruhesystem des betreffenden Mediums.

Für ein ruhendes Medium kann man die Zeitableitung im Amperschen (1.28) und Faradayschen Gesetz (1.29) unter das Integral ziehen. Die Anwendung der Sätze von Stokes und Gauss liefern dann die bekannten Maxwell-Gleichungen in differentieller Form:

$$\nabla \cdot \vec{D} = q\rho, \quad (1.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.33)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.34)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Diese Gleichungen sind materialunabhängig und gelten auch in bewegter Materie. Um die Gleichungen der Elektrodynamik an das Transformationsverhalten der üblichen strömungsmechanischen Gleichungen anzupassen, gelte:

$$\frac{|\frac{L}{T}|}{c_L} \ll 1, \quad (1.36)$$

wobei c_L die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Setzt man elektromagnetische Felder, Ströme und Ladungen voraus, so sollen sich diese Größen in einer

charakteristischen Zeit T und über einer Länge L ändern. Das Verhältnis $\frac{L}{T}$ repräsentiert dabei eine makroskopische Geschwindigkeit. Das elektromagnetische Feld ist durch die Größenordnungen E und B gekennzeichnet. Aus dem Faradayschen Induktionsgesetz (1.35) folgt dann, dass eine Änderung des elektrischen Feldes δE über einer Länge L einer Änderung der magnetischen Induktion δB in einer Zeitspanne T entspricht:

$$\left| \frac{\delta E}{L} \right| \propto \left| \frac{\delta B}{T} \right|. \quad (1.37)$$

Daraus folgt, dass das Verhältnis der Änderung des elektrischen Feldes zu der der magnetischen Induktion von der Größenordnung einer charakteristischen Geschwindigkeit V ist:

$$\left| \frac{\delta E}{\delta B} \right| \propto \left| \frac{L}{T} \right| = V. \quad (1.38)$$

Nun kann man sich im Ampereschen Gesetz (1.34) das Verhältnis zwischen Verschiebestrom und Rotation des Magnetfeldes anschauen:

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| \frac{1}{|\nabla \times \vec{H}|} \propto \left| \frac{\delta D}{T} \right| \frac{L}{\delta H} = \left| \frac{\epsilon \delta E}{T} \right| \frac{\mu L}{\delta B} = \frac{V^2}{c_L^2}. \quad (1.39)$$

Ändern sich die elektromagnetischen Felder auf einer charakteristischen Länge L in einer charakteristischen Zeit T in oben erläuteter Weise, so dass oberer Grenzfall gültig ist, kann der Verschiebestrom im Ampereschen Gesetz vernachlässigt werden. In der MHD gilt damit das Amperesche Gesetz in der Form:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}. \quad (1.40)$$

Das heißt, die Magnetohydrodynamik ist wegen $\frac{L}{c_L T} \ll 1$ eine Niederfrequenzapproximation der Maxwellgleichungen. Als Resultat erhält man aus den Maxwellischen Gleichungen eine galilei-invariante Theorie. Wird der Verschiebestrom vernachlässigt, folgt aus Gleichung (1.40):

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.41)$$

Die elektrische Stromdichte ist divergenzfrei. Die Stromdichte \vec{j} setzt sich im allgemeinen aus dem Leitungs- und Konvektionsstrom zusammen, das heißt $\vec{j}_L + \vec{j}_K$. Setzt man die Größenordnungen des Konvektionsstrom und des Gesamtstroms ins Verhältnis, erhält man:

$$\frac{|\vec{j}_K|}{|\vec{j}|} = \frac{|q\rho\vec{V}|}{|\nabla \times \vec{H}|} = \left| \frac{\mu L}{\delta B} \right| \left| \frac{\epsilon \delta E}{L} \right| |\vec{V}| = \frac{V^2}{c_L^2}. \quad (1.42)$$

Der Konvektionsstrom kann ebenfalls vernachlässigt werden. Durch eine ähnliche Abschätzung kann man zeigen, dass die Änderung der elektrischen Ladung in (1.11) vernachlässigt werden kann, so dass (1.41) bestätigt wird. Damit resultiert der elektrische Strom allein durch die elektromagnetischen Felder.

Ohne Konvektionsstrom lautet das Ohmsche Gesetz (1.25) für einen mit dem Fluid bewegten Beobachter:

$$\frac{1}{\sigma} \vec{j} = \vec{E}'. \quad (1.43)$$

Das Verhältnis zwischen den zwei Krafttermen $q\rho\vec{E}$ und $\vec{j} \times \vec{B}$ der Impulsbilanz (1.14) ergibt wie in den Gleichungen (1.39) und (1.42) einen Betrag von $\frac{V^2}{c_L^2}$, so dass die Vernachlässigung von $q\rho\vec{E}$ in (1.22) gerechtfertigt ist. Ein mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegter Beobachter nimmt ein anderes elektromagnetisches Feld wahr als ein ruhender Beobachter, siehe zum Beispiel [25] oder [49]. Für kleine Geschwindigkeiten \vec{v} und $|\frac{v^2}{c_L^2}| \ll 1$ gelten bezüglich der elektromagnetischen Feldgrößen die galilei-invarianten Transformationsregeln:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.44)$$

$$\vec{D}' = \vec{D}, \quad (1.45)$$

$$\vec{H}' = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}, \quad (1.46)$$

$$\vec{B}' = \vec{B}. \quad (1.47)$$

Während die elektrische Verschiebung \vec{D} und die magnetische Induktion \vec{B} invariant unter Galilei-Transformationen sind, müssen das elektrische Feld \vec{E} und das Magnetfeld \vec{H} transformiert werden. Deshalb besitzen die Materialgesetze für einen relativ zum ruhenden Medium bewegten Beobachter eine andere Form als im Ruhesystem des Mediums:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}' - \epsilon \vec{v} \times \vec{B}, \quad (1.48)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}' + \mu \vec{v} \times \vec{D}. \quad (1.49)$$

Herleitung der Induktionsgleichung

Eliminiert man im Faradayschen Gesetz (1.35) das elektrische Feld \vec{E} mithilfe des Ohmschen Gesetzes für bewegte Medien (1.25) und ersetzt anschließend die Stromdichte \vec{j} mit dem vortmaxwellschen Amperegesetz (1.40), erhält man die Induktionsgleichung:

$$\dot{\vec{B}} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B}. \quad (1.50)$$

Die Induktionsgleichung beschreibt die Dynamik der magnetischen Induktion. Damit sind alle Gleichungen der MHD bekannt.

1.3 Die Gleichungen der Magnetohydrodynamik

Die Kontinuitätsgleichung (1.8), die Impulsbilanz (1.22) und die Induktionsgleichung (1.50) bilden das Gleichungssystem der Magnetohydrodynamik für ein reibungsfreies Fluid im Schwerfeld:

$$\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.51)$$

$$\rho \left\{ \dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right\} = -\nabla p + \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \rho \vec{g}, \quad (1.52)$$

$$\dot{\vec{B}} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \vec{B}. \quad (1.53)$$

Für zähe Fluide kann man auf der rechten Seite der Impulsbilanz die Reibung durch die zusätzlichen Terme

$$\eta \Delta \vec{v} + \eta_V \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \quad (1.54)$$

modellieren.

In diesem Gleichungssystem kommt das elektrische Feld \vec{E} und die Permittivität ϵ nicht vor. Beide Größen sind für das Lösen des Gleichungssystems irrelevant. Das elektrische Feld kann über das Ohmsche Gesetz (1.25) berechnet werden.

Durch das Vernachlässigen der zeitlichen Ableitung des Verschiebestroms \vec{D} wird die Permittivität ϵ aus den Maxwellgleichungen entfernt.

An Rändern oder Trennflächen können beide Größen jedoch einen Einfluss auf die Lösung haben. Mehr dazu im Kapitel 3.

In meiner Dissertation beschränke ich mich auf unendlich gut elektrisch leitfähige Fluide. Damit der Dämpfungsterm in der Induktionsgleichung (1.50) vernachlässigt werden kann, muss

$$\frac{1}{\mu\sigma} \frac{\delta B}{L^2} \ll \frac{\delta B}{T} \quad (1.55)$$

gelten.

Das Gleichungssystem für dichtebeständige ($\rho_0 = \text{konst.}$) reibungsfreie Fluide im Schwerfeld mit vernachlässigtem elektrischen Widerstand lautet:

$$\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \frac{1}{\mu\rho_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{g}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.56)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.57)$$

Die Kontinuitätsgleichung äußert sich in der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes. Das Geschwindigkeitsfeld und die magnetische Induktion sind die gesuchten Größen. Es gibt genau so viele Variablen wie Gleichungen. Damit liegt ein mathematisch vollständiger Satz nichtlinearer partieller Differentialgleichungen vor.

Neben der klassischen Kelvin-Helmholtz-Instabilität zweier dichtebeständiger Flüssigkeiten werden im Kapitel 4 auch Strömungen betrachtet, die im Grundzustand einen Massendichtegradienten senkrecht zur Sprungfläche aufweisen. Diese Dichteschichtung wird im Rahmen der Boussinesq-Näherung behandelt. Der Druck ist auch in diesem Fall keine Funktion thermodynamischer Variablen, sondern ein Integral der Bewegung.

Liegt eine geschichtete Strömung vor, etwa durch die Schwerkraft verursacht, dann zeichnet sich die Massendichte durch eine Schichtung in z -Richtung aus:

$$\rho = \rho_0(z) + \tilde{\rho}(x, y, z, t). \quad (1.58)$$

Diese Dichteschichtung soll im Verhältnis zum absoluten Wert der Dichte klein sein, das heißt, es gilt:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \ll \frac{1}{L}. \quad (1.59)$$

Dabei ist L eine charakteristische Länge des Systems, etwa die Wellenlänge einer Anfangsstörung. Setzt man (1.58) in (1.51) ein und fordert weiterhin die Inkompressibilität des Fluids, gewinnt man aus der Kontinuitätsgleichung zwei unabhängige Teile.

Die Massendichte in der Impulsbilanz (1.52) wird in der Boussinesq-Näherung wie folgt behandelt [48]: Nur im Auftriebsterm ist die Dichte nicht konstant. Mit ρ_0^* wird der konstante Wert bezeichnet. Das Gleichungssystem der Magne-

tohydrodynamik wird unter der Anwendung der Boussinesq-Approximation zu:

$$\dot{\rho} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad (1.60)$$

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p + \frac{1}{\mu \rho_0^*} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g}, \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1.61)$$

$$\dot{\vec{B}} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}), \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.62)$$

Im Gegensatz zum Gleichungssystem dichtebeständiger Fluide tritt hier eine Gleichung für die Dichtestörung $\dot{\rho}$ hinzu. Bei der Boussinesq-Näherung ist zu beachten, dass in der Impulsbilanz die Dichte nur im Auftriebsterm variabel angenommen wird. Die Boussinesq-MHD-Gleichungen sind zum Beispiel für die Ionosphäre auf der sonnenabgewandten Seite anwendbar. Mehr dazu steht in Kapitel 4.

Beide Gleichungssysteme zeichnen sich gegenüber dem kompressiblen Fall durch die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ aus. Zusammen mit der Divergenzfreiheit der magnetischen Induktion $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ folgt daraus, dass ebene Wellen stets Transversalwellen sind. Longitudinale Schallwellen sind in beiden Systemen ausgeschlossen. Das führt dazu, dass einige nichtlineare Terme in den Gleichungen höherer Ordnung verschwinden, da $\vec{v}_1 \cdot \vec{k} = 0$. Am Anfang von Kapitel 4 wird auf die Behandlung kompressibler Fluide eingegangen. Mit Hilfe der Boussinesq-Approximation kann man bereits erste Einblicke in die Schwierigkeiten bei der Berücksichtigung der Kompressibilität erhalten.

Die Magnetohydrodynamik ist eine Niederfrequenzapproximation. Im Buch von Vedenov [80] wird dies anschaulich gezeigt. Dort erhält man aus einem Zweiflüssigkeitsmodell mit Wechselwirkung und Berücksichtigung des vollen elektromagnetischen Feldes eine Dispersionsrelation sechster Ordnung in ω^2 . Diese Lösungen enthalten sowohl die hoch- als auch niederfrequenten Wellenbewegungen. Um aus dieser Dispersionsrelation die Dispersionsrelationen für Alfvénwellen zu gewinnen, werden folgende Näherungen verwendet: Die Zyklotronfrequenz der Elektronen ω_e ist viel kleiner als die Plasmafrequenz ω_p :

$$\omega_e = \frac{eB}{m_e} \ll \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} = \omega_p \quad (1.63)$$

mit der elektrischen Feldkonstante ϵ_0 . Die Frequenz der gesuchten Wellenbewegungen ist sehr viel kleiner als die Plasmafrequenz und die Frequenz elektromagnetischer Wellen im Vakuum:

$$\omega \ll \omega_p, c_L k. \quad (1.64)$$

Um aus den niederfrequenten Wellenbewegungen die Alfvénwellen herauszufiltern wird angenommen, dass

$$\frac{\rho_e}{\rho_i} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{c_L^2 k^2} \right) \gg 1. \quad (1.65)$$

Die letzte Ungleichung ist gleichbedeutend mit $\frac{\omega_p}{c_L k} \gg 1$. Um diese zu erfüllen, dürfen nur kleine Wellenzahlen k angenommen werden. Für die Lösungen dürfen

nur lange Wellen angenommen werden, da sonst die dazugehörigen Frequenzen die Annahme der Niederfrequenzapproximation verletzen.

Die rechten Seiten der Impulsbilanzen können als Divergenz des Cauchy- und Maxwellischen Spannungstensors $p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}$ geschrieben werden [25]. Dieses Vorgehen ist nützlich um die korrekten Übergangsbedingungen an der Trennfläche herzuleiten.

Der Maxwellspannungstensor lautet in den verwendeten kartesischen Koordinaten mit $\vec{B} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\mu} & -\frac{ab}{\mu} & -\frac{ac}{\mu} \\ -\frac{ab}{\mu} & \frac{a^2-b^2+c^2}{2\mu} & -\frac{bc}{\mu} \\ -\frac{ac}{\mu} & -\frac{bc}{\mu} & \frac{a^2+b^2-c^2}{2\mu} + \rho g \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

Man überprüft leicht, dass

$$-\nabla \cdot (p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}) \quad (1.67)$$

die rechten Seiten der Impulsbilanzen ergeben.

Kapitel 2

Sprungbedingungen

Die Übergangsbedingungen an Trennflächen mit Unstetigkeiten von Feldgrößen erhält man im allgemeinen dadurch, dass man für das System geltende Erhaltungsgleichungen in einem Integrationsgebiet betrachtet, welches die Trennfläche miteinschließt und das Integrationsgebiet systematisch auf die Trennfläche verkleinert. Für eine ausführlichere Darstellung der Methode kann man zum Beispiel das Lehrbuch von Becker und Bürger [1] konsultieren. Für eine bewegte Trennfläche ist es zweckmäßig ein Bezugssystem zu wählen, das sich mit der momentanen Geschwindigkeit der Trennfläche bewegt. Der Gauss'sche und Stokes'sche Integralsatz gelten nur für stetig differenzierbare Felder. Springen an der Trennfläche physikalische Größen, so muss man zusätzliche Integrationsflächen bzw. -wege einführen. Diese führen dann im Grenzfall immer kleiner werdenden Integrationsgebietes auf die Übergangsbedingungen der involvierten physikalischen Größen.

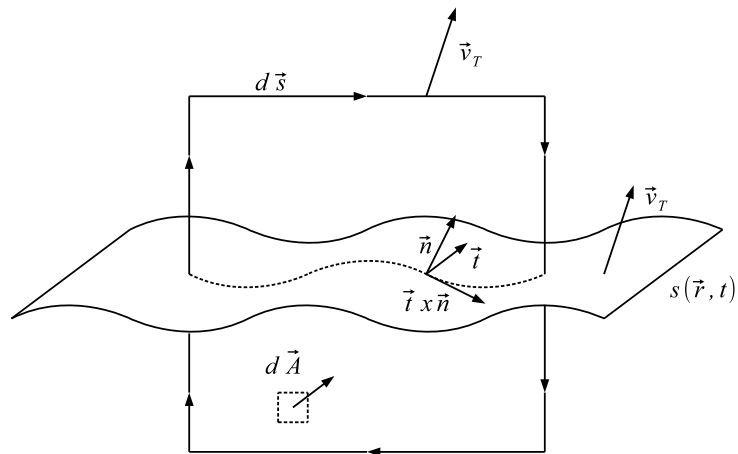


Abbildung 2.1: Integrationsfläche über einer Trennfläche $s(\vec{r}, t)$

In der Abbildung (2.1) ist eine Integrationsfläche gegeben, die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v}_T der Trennfläche $s(\vec{r}, t)$ fortbewegt. Im Falle der Kelvin-Helmholtz-Instabilität ist es günstig, die Trennfläche durch die Auslenkung $s(\vec{r}, t)$ am Ort \vec{r} zur Zeit t von der ebenen Trennfläche des Grundzustands bei

$z = 0$ zu beschreiben. Es ist wichtig, dass die Felder im Ruhesystem des Integrationsgebietes ausgewertet werden. Die Flächennormale sei mit \vec{t} , der Normaleneinheitsvektor der Trennfläche mit \vec{n} bezeichnet.

Der Schnitt zwischen Integrationsfläche und Unstetigkeitsfläche ist eine (gestrichelt eingezeichnete) orts- und zeitabhängige Linie. Die Tangente an die Schnittlinie ist durch das Kreuzprodukt zwischen der Flächennormalen \vec{t} und des Normaleneinheitsvektors der Trennfläche \vec{n} gegeben.

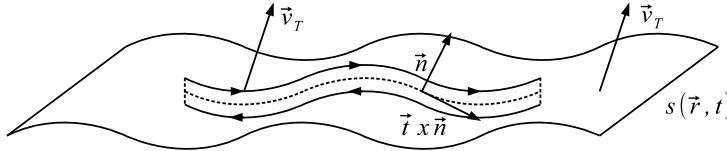


Abbildung 2.2: Parallelströmungen

Verkleinert man nun die Seitenlängen des Integrationsgebietes, bleiben zur Berechnung nur die zwei in Abbildung (2.2) durchgängig gezeichneten Wege übrig. Der erste Weg führt durch die obere Strömung entlang der Richtung $\vec{t} \times \vec{n}$, der zweite Weg durch die untere in die entgegengesetzte Richtung $\vec{n} \times \vec{t}$. Integrale, die proportional zur Fläche sind, gehen gegen 0. Die Vektoren \vec{t} , \vec{n} und $\vec{t} \times \vec{n}$ bilden ein orthonormiertes System, wenn die eingeführte Fläche die Trennfläche senkrecht durchdringt.

Aus den integralen Übergangsbedingungen müssen wegen der willkürlichen Wahl der Kontrollfläche lokal gültige Sprungbedingungen hergeleitet werden können.

2.1 Die Reynolds'schen Transporttheoreme

Für die Berechnung der Sprungbedingungen an einer frei beweglichen Trennfläche zwischen den Teilströmungen benötigt man die Transporttheoreme nach Reynolds, die am Anfang des letzten Jahrhunderts von ihm veröffentlicht wurden [70]. Sowohl die strömungsmechanischen Bilanzgleichungen für Masse, Impuls, Drehimpuls, Energie und Entropie als auch die Maxwellgleichungen sind in ihrer allgemeinsten Form Integralgleichungen. In diesen Gleichungen treten zeitliche Änderungen von Integralen auf.

Die Reynolds'schen Transporttheoreme gestatten es, die Zeitableitungen von Volumen-, Flächen-, und Wegintegralen mit zeitlich veränderlichen Grenzen umzuformen. In den Büchern der Strömungsmechanik [10] und [75] findet man Herleitungen aus der Betrachtung infinitesimal kleiner Wegelemente.

Im Folgenden werden die Reynolds'schen Transporttheoreme für Volumen und Flächen über das Transformationsverhalten der Felder hergeleitet. Das Transporttheorem für Linienintegrale wird nicht benötigt.

Die zeitliche Änderung eines Volumenintegrals

Anhand des Erhaltungssatzes der Masse wird in diesem Abschnitt das Reynolds'sche Transporttheorem für ein Volumenintegral hergeleitet.

Die Masse eines Flüssigkeitsgebietes ist durch das Volumenintegral über die Dichte gegeben. Die zeitliche Änderung der Masse in diesem ortsfesten Volumen

V_0 ist dann durch den Massenfluß durch die Oberfläche des Volumens gegeben:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho dV + \int_{\partial V_0} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0. \quad (2.1)$$

Für ein beliebiges bewegtes Volumen muss ebenfalls dieser Erhaltungssatz der Masse gelten. Im Oberflächenintegral muss dann allerdings die Geschwindigkeit der Oberfläche \vec{v}_T berücksichtigt werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV + \int_{\partial V(t)} \rho (\vec{v} - \vec{v}_T) \cdot d\vec{A} = 0. \quad (2.2)$$

Besitzt das Fluid an der Oberfläche die gleiche Geschwindigkeit wie die Oberfläche selbst, fließt keine Masse in das betrachtete Volumen hinein oder hinaus. Die zeitliche Ableitung bezieht sich auf das zeitlich veränderliche Volumen $V(t)$. Aus der letzten Gleichung folgt, dass die zeitliche Änderung eines bewegten Volumenintegrals durch

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t)} \dot{\rho} dV + \int_{\partial V(t)} \rho \vec{v}_T \cdot d\vec{A} \quad (2.3)$$

gegeben sein muss, um wieder Gleichung (2.1) zu erhalten. Gleichung (2.3) ist das Reynolds'sche Transporttheorem für Volumenintegrale.

Die zeitliche Änderung eines Flächenintegrals

Für die Herleitung des Reynolds'schen Transporttheorems für Flächenintegrale kann das Amperegesetz (1.28) in einem bewegten Integrationsgebiet herangezogen werden:

$$\int_{\partial A(t)} \vec{H}' \cdot d\vec{s} = \int_{A(t)} \vec{j}' \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{D}' \cdot d\vec{A}. \quad (2.4)$$

Für einen nicht relativistisch bewegten Beobachter gelten für die elektromagnetischen Felder die Transformationen aus dem vorherigen Kapitel (1.44). Damit lassen sich die physikalischen Größen durch die Felder im ruhenden Laborsystem ausdrücken:

$$\int_{\partial A(t)} (\vec{H} - \vec{v}_T \times \vec{D}) \cdot d\vec{s} = \int_{A(t)} (\vec{j} - q\rho \vec{v}_T) \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (2.5)$$

Der konvektive Anteil der elektrischen Stromdichte durch etwaige freie elektrische Ladungen muss berücksichtigt werden. Eine ruhende elektrische Ladungsdichte wird in einem bewegten Koordinatensystem als elektrische Stromdichte wahrgenommen:

$$\vec{j}' = \vec{j} - q\rho \vec{v}_T. \quad (2.6)$$

Die Ladungsdichte $q\rho$ kann durch $\nabla \cdot \vec{D}$ dargestellt werden. Man erhält die ursprüngliche Form des Amperegesetzes (2.4) in den Größen des Ruhesystems,

wenn für die zeitliche Ableitung eines bewegten Flächenintegrals folgende Formel gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \int_{A(t)} \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{A} + \int_{A(t)} (\nabla \cdot \vec{D}) \vec{v}_T \cdot d\vec{A} - \int_{\partial A(t)} (\vec{v}_T \times \vec{D}) \cdot d\vec{s}. \quad (2.7)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite liefert einen Beitrag zur zeitlichen Änderung des Integrals, wenn Quellen des Feldes $\nabla \cdot \vec{D}$ durch die Fläche treten. Der dritte Term integriert die Feldlinien auf, die über den Rand der Fläche zu- oder abfließen. Beide Terme heben sich mit den aus der Galilei-Transformation stammenden Termen auf und ergeben das Ampere-Gesetz in seiner üblichen Form. Gleichung (2.7) ist das Reynolds'sche Transporttheorem für Flächenintegrale [70]. Es gilt für beliebige Vektorfelder \vec{D} .

Aus dem Transformationsverhalten der Felder haben wir die Reynolds'schen Transporttheoreme hergeleitet. Man kann aber auch von der kinematischen Betrachtung infinitesimaler Volumen-, Flächen- und Wegelemente ausgehen, um auf das Transformationsverhalten der elektromagnetischen Felder zu schließen.

2.2 Die kinematische Übergangsbedingung

Die Erhaltung der Masse für ein mit der Wirbelschicht mitbewegtes Volumen ist durch Gleichung (2.2) gegeben. Wie in der Einleitung dieses Kapitels beschrieben lässt man das Integrationsvolumen, welches die Trennfläche miteinschließt, immer kleiner werden, so dass das Volumenintegral gegen 0 geht und von dem Oberflächenintegral nur zwei getrennte Oberflächen übrigbleiben:

$$\begin{aligned} \int_{A(t)} \rho (\vec{v} - \vec{v}_T) \cdot d\vec{A} &\Rightarrow \int_{A_1(t)} \rho_1 (\vec{v}^{(1)} - \vec{v}_T) \cdot d\vec{A} + \int_{A_2(t)} \rho_2 (\vec{v}^{(2)} - \vec{v}_T) \cdot d\vec{A} \\ &= \int_{A_T(t)} \left\{ \rho_1 (\vec{v}^{(1)} - \vec{v}_T) - \rho_2 (\vec{v}^{(2)} - \vec{v}_T) \right\} \cdot \vec{n} dA = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mit den Indizes 1, 2 an Flächen, Geschwindigkeiten und Dichten werden die Größen auf den beiden Seiten unterschieden. Die beiden Oberflächenintegrale über die verbliebenen Flächen A_T werden voneinander abgezogen, da ihre Flächennormalen entgegengesetzt zeigen. Damit die Kontinuitätsgleichung auch in diesem Fall erfüllt ist, müssen die verbliebenen Oberflächenintegrale verschwinden. Dieser Sachverhalt gilt für beliebig gewählte Integrationsgebiete:

$$\left\{ \rho_1 (\vec{v}^{(1)} - \vec{v}_T) - \rho_2 (\vec{v}^{(2)} - \vec{v}_T) \right\} \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.9)$$

Mit der Einführung des Symbols der Sprungklammern

$$||a|| = a_2 - a_1 \quad (2.10)$$

lautet das Ergebnis:

$$||\rho (\vec{v} - \vec{v}_T)|| \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.11)$$

Für nicht mischende Fluide folgen die Fluidteilchen an der Trennfläche der Bewegung der Trennfläche. Dann gelten für die Geschwindigkeitsfelder der Strömungen an der Trennfläche, dass die Normalkomponenten gleich der der Trennfläche sind:

$$\begin{aligned} (\vec{v}^{(1)} - \vec{v}_T) \cdot \vec{n} &= 0, \\ (\vec{v}^{(2)} - \vec{v}_T) \cdot \vec{n} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3 Die dynamische Übergangsbedingung

Aus der Impulsbilanz für ein mit der Trennfläche mitbewegtes Volumen erhält man die dynamische Übergangsbedingung. Zweckmäßigerweise schreibt man den Impulsfluß mit dem dyadischen Produkt. Die Lorentzkraft auf der rechten Seite wird durch den Maxwellspannungstensor \mathbf{T} dargestellt:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho (\vec{v} - \vec{v}_T) dV + \int_{\partial V} \rho (\vec{v} - \vec{v}_T) \otimes (\vec{v} - \vec{v}_T) d\vec{A} = - \int_{\partial V} (p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}) \cdot d\vec{A}. \quad (2.13)$$

An einer Trennfläche gilt dann

$$\int_{A_T} \|\rho (\vec{v} - \vec{v}_T) \otimes (\vec{v} - \vec{v}_T)\| \cdot \vec{n} dA = - \int_{A_T} \|p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}\| \cdot \vec{n} dA. \quad (2.14)$$

Die linke Seite verschwindet auf Grund der kinematischen Sprungbedingung. Wenn die Trennfläche keine Masse besitzt, muss die resultierende Kraft normal zu ihr verschwinden. Bei Bedarf können eine Oberflächenspannung oder eine Gewichtskraft, die singular in der Wirbelschicht auftreten, mit in die Bilanz mitaufgenommen werden. Die Übergangsbedingung gilt für beliebig gewählte Flächen:

$$\vec{n} \cdot (\|p \cdot \mathbf{I} + \mathbf{T}\| \cdot \vec{n}) = 0. \quad (2.15)$$

Im Anhang A ist die dynamische Übergangsbedingung bis zur dritten Störungsordnung entwickelt.

2.4 Die elektromagnetischen Übergangsbedingungen

Die Übergangsbedingungen an die Normalkomponente des elektrischen und magnetischen Feldes

Das Fehlen von magnetischen Quellen (1.26) äußert sich in folgender Übergangsbedingung:

$$\|\vec{B}\| \cdot \vec{n} = 0. \quad (2.16)$$

Die senkrecht zur Trennfläche stehende Komponente der magnetischen Induktion muss stetig durch diese hindurchtreten. Die Maxwellgleichung (1.27) führt auf folgende Bedingung für die elektrische Verschiebung:

$$\|\vec{D}\| \cdot \vec{n} = \sigma. \quad (2.17)$$

Der Sprung in der elektrischen Verschiebung senkrecht zur Trennfläche ist gleich der Trennflächenladung σ . Diese Sprungbedingungen gelten sowohl für ruhende als auch bewegte Trennflächen.

Die Sprungbedingung der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes

In einem bewegten Koordinatensystem betrachten wir eine umrandete Fläche, die sich über die Trennfläche der beiden Strömungen erstreckt. Das Faradaysche Gesetz lautet:

$$\int_{\partial A(t)} \vec{E}' \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (2.18)$$

Das elektrische Feld $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_T \times \vec{B}$ ist das elektrische Feld des mit \vec{v}_T bewegten Beobachters. Auf der rechten Seite wirkt die substantielle Zeitableitung auch auf das mitbewegte Flächenelement. An der Trennfläche können die Felder Unstetigkeiten aufweisen. Aus diesem Grund kann man den Stokes'schen Satz nur anwenden, indem man zwei getrennte Bereiche betrachtet [69]:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A(t)} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} &= \int_{\partial A_1(t)} (\vec{E}^{(1)} + \vec{v}_T \times \vec{B}^{(1)}) \cdot d\vec{s} \\ &+ \int_{\partial A_2(t)} (\vec{E}^{(2)} + \vec{v}_T \times \vec{B}^{(2)}) \cdot d\vec{s} \\ &+ \int_{s(t)} \left\{ \vec{E}^{(2)} + \vec{v}_T \times \vec{B}^{(2)} - \vec{E}^{(1)} - \vec{v}_T \times \vec{B}^{(1)} \right\} \cdot d\vec{s}_T. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die beiden ersten Integrale auf der rechten Seite können mit dem Stokes'schen Satz in Flächenintegrale umgewandelt werden. Diese heben sich mit dem Integral über der magnetischen Induktion aus (2.18) auf und es verbleibt:

$$\int_{s(t)} \left(\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)} + \vec{v}_T \times (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) \right) d\vec{s}_T = 0. \quad (2.20)$$

Das Wegelement $d\vec{s}_T$ kann durch die Flächennormalen \vec{t} der beliebig wählbaren Fläche A und \vec{n} ausgedrückt werden. Es gilt

$$d\vec{s}_T = d(\vec{t} \times \vec{n}), \quad (2.21)$$

$$\left(\|\vec{E}\| + \vec{v}_T \times \|\vec{B}\| \right) (\vec{n} \times \vec{t}) = 0. \quad (2.22)$$

Nach ein paar vektoranalytischen Umformungen erscheint die Sprungbedingung in der bekannten Form [25]:

$$\vec{t} \cdot \left\{ \vec{n} \times \|\vec{E}\| - (\vec{n} \cdot \vec{v}_T) \|\vec{B}\| \right\} = 0. \quad (2.23)$$

Für ideale Leiter ist die Sprungbedingung immer erfüllt, da sich die Ladungen an der Grenzfläche so anordnen, dass es kein elektrisches Feld tangential zur Grenzfläche gibt.

Die Übergangsbedingung aus dem Ampere-Gesetz

Das Integrationsgebiet erstreckt sich über die Trennfläche. Das Ampere-Gesetz lautet im mit der Trennfläche mitbewegten Koordinatensystem:

$$\int_{\partial A(t)} \vec{H}' \cdot d\vec{s} = \int_{A(t)} \vec{j}' \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \int_{A(t)} \vec{D} \cdot d\vec{A}. \quad (2.24)$$

Da das Geschwindigkeitsfeld an dieser Trennfläche unstetig ist, kann der Stokes'sche Satz nicht ohne eine kleine Erweiterung angewendet werden. Wenn wir die Größen durch die Felder im Laborsystem ausdrücken lautet das Gesetz:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A(t)} (\vec{H} - \vec{v}_T \times \vec{D}) \cdot d\vec{s} &= \int_{A(t)} (\vec{j} - q\rho\vec{v}_T) \cdot d\vec{A} \\ &+ \int_{A(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + (\vec{v}_T \cdot \nabla) \vec{D} + (\nabla \cdot \vec{v}_T) \vec{D} - (\vec{D} \cdot \nabla) \vec{v}_T \right\} \cdot d\vec{A}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die linke Seite muss um zwei Integrationswege ergänzt werden, um den Stokes'schen Satz an der Unstetigkeitskurve anwenden zu können [69]:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A(t)} (\vec{H} - \vec{v}_T \times \vec{D}) \cdot d\vec{s} &= \int_{\partial A_1(t)} (\vec{H}^{(1)} - \vec{v}_T \times \vec{D}^{(1)}) \cdot d\vec{s} \\ &+ \int_{\partial A_2(t)} (\vec{H}^{(2)} - \vec{v}_T \times \vec{D}^{(2)}) \cdot d\vec{s} + \int_{s(t)} (\|\vec{H}\| - \vec{v}_T \times \|\vec{D}\|) \cdot d\vec{s}_T. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Die ersten beiden Integrale erfüllen das Amperegesetz. Vom Integral über die Stromdichte aus (2.25) bleibt ebenfalls ein Rest übrig:

$$\int_{s(t)} (\|\vec{H}\| - \vec{v}_T \times \|\vec{D}\|) \cdot d\vec{s}_T = \int (\vec{j}_T - \sigma\vec{v}_T) \cdot d\vec{t}. \quad (2.27)$$

Mit der Einführung eines Oberflächenstroms \vec{j}_T und einer Oberflächenladung σ ergibt sich:

$$(\|\vec{H}\| - \vec{v}_T \times \|\vec{D}\|) (\vec{t} \times \vec{n}) = (\vec{j}_T - \sigma\vec{v}_T) \cdot \vec{t}, \quad (2.28)$$

$$\vec{t} \cdot \left\{ \vec{n} \times \|\vec{H}\| + (\vec{v}_T \cdot \vec{n}) \|\vec{D}\| - (\|\vec{D}\| \cdot \vec{n}) (\vec{v}_T \cdot \vec{t}) \right\} = (\vec{j}_T - \sigma\vec{v}_T) \cdot \vec{t}. \quad (2.29)$$

Wenn wir hier die Übergangsbedingung an die senkrechte Komponente der elektrischen Flußdichte (2.17) einsetzen, erhalten wir:

$$\vec{t} \cdot \left\{ \vec{n} \times \|\vec{H}\| + (\vec{v}_T \cdot \vec{n}) \|\vec{D}\| \right\} = \vec{j}_T \cdot \vec{t}. \quad (2.30)$$

Die Sprungbedingungen an die elektromagnetischen Felder (2.16) bis (2.30) für bewegte Trennflächen werden auch im bekannten Werk von Jackson [25] angegeben. Es ist erstaunlich, dass nur die Geschwindigkeit der Trennfläche in die

Bedingungen miteingeht. Die Geschwindigkeit der Teilströmungen hat keinen Einfluss auf die Sprungbedingungen. Der Zusammenhang ist rein kinematisch. Die elektromagnetischen Übergangsbedingungen für eine bewegte Trennfläche lassen sich auch durch eine Galilei-Transformation aus den bekannten Übergangsbedingungen an einer feststehenden Trennfläche gewinnen. Für einen beliebigen Punkt der bewegten Trennfläche gelten in einem gleichförmig mitbewegten Bezugssystem, dessen Geschwindigkeit mit der momentanen Geschwindigkeit des Punktes zusammenfällt, die Übergangsbedingungen einer feststehenden Trennfläche:

$$||\vec{B}'|| \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.31)$$

$$||\vec{D}'|| \cdot \vec{n} = \sigma, \quad (2.32)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{E}'|| = \vec{0}, \quad (2.33)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{H}'|| = \vec{j}_T'. \quad (2.34)$$

Diese elektrodynamischen Größen müssen dann mit einer Galilei-Transformation in das Laborsystem übertragen werden. Die Geschwindigkeit \vec{v}_T ist in beiden Teilströmungen gleich, so dass sie aus der Sprungklammer gezogen werden kann. Nach ein paar vektoranalytischen Umformungen erhält man die Übergangsbedingungen für eine bewegte Sprungfläche [25]:

$$||\vec{B}|| \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.35)$$

$$||\vec{D}|| \cdot \vec{n} = \sigma, \quad (2.36)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{E}|| - \vec{v}_T \cdot \vec{n} ||\vec{B}|| = \vec{0}, \quad (2.37)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{H}|| + \vec{v}_T \cdot \vec{n} ||\vec{D}|| = \vec{j}_T. \quad (2.38)$$

Kapitel 3

Die magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz- Instabilität dichtebeständiger Fluide

Der allgemeine Grundzustand einer magnetohydrodynamischen Kelvin-Helmholtz-Instabilität in zwei Raumdimensionen, wie sie Chandrasehkar [15] behandelt hat, ist in Abbildung (3.1) gezeigt. Neben den Geschwindigkeitsvektoren der Parallelströmungen sind konstante magnetische Induktionen mit gestrichelten Vektoren eingezeichnet.

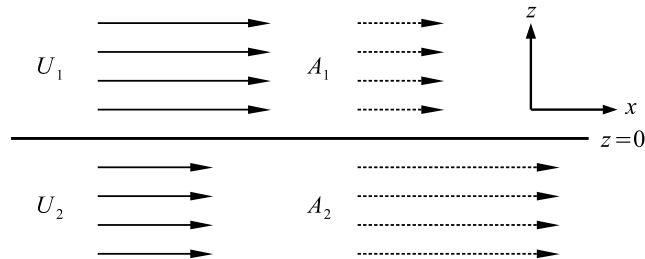


Abbildung 3.1: Strömung zur Kelvin-Helmholtz-Instabilität MHD, Grundzustand

Den Teilströmungen werden neben den Massendichten ρ_1 und ρ_2 auch die magnetischen Permeabilitäten μ_1 und μ_2 zugeordnet. In idealen Fluiden mit vernachlässigter Zähigkeit und elektrischem Widerstand erlauben die strömungsmechanischen Gleichungen und die Maxwellgleichungen tangentielle Unstetigkeitsstellen der Geschwindigkeit und des Magnetfelds. Die Unstetigkeitsstellen sind mit einer singulären Wirbelschicht bzw. einem Trennflächenstrom bei $z = 0$ verknüpft.

Die Auswirkung der Magnetfelder auf die Stabilität der Strömung ist qualitativ in der nächsten Abbildung (3.2) dargestellt.

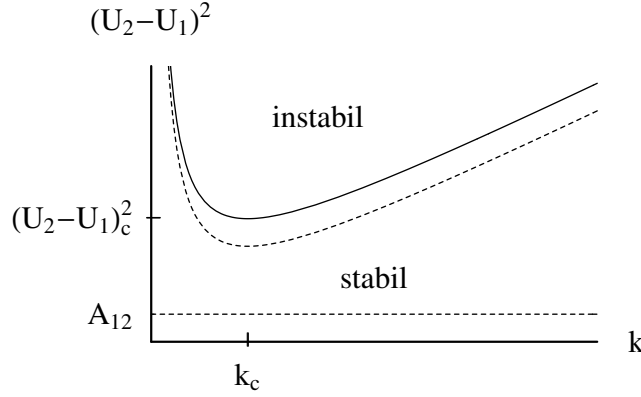


Abbildung 3.2: Neutralitätskurve der Kelvin-Helmholtz-Instabilität, MHD

Im Vergleich mit Abbildung (2) ist die Neutralitätskurve um einen konstanten Betrag

$$A_{12} = \frac{A_1^2}{\mu_1 \rho_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_2} + \frac{A_2^2}{\mu_2 \rho_2} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} \quad (3.1)$$

nach oben versetzt. Dieser Betrag ist durch die Quadrate der Alfvéngeschwindigkeiten $\frac{A^2}{\mu\rho}$ der beiden Teilströmungen, die mit den relativen Dichten gewichtet sind, gegeben. Wie bei freien Alfvénwellen auch, wirkt eine Magnetfeldlinie wie eine gespannte Seite, die einer Auslenkung entgegen wirkt (Einfrier-Effekt [6],[16]).

Das Minimum der Neutralitätskurve liegt nach wie vor bei k_c . Es muss jedoch eine höhere Geschwindigkeitsdifferenz gewählt werden um den instabilen Bereich zu erreichen. Die Strömung wird also durch die angelegten Magnetfelder stabilisiert.

Im folgenden wird eine lineare Stabilitätsanalyse für drei Raumdimensionen der Kelvin-Helmholtz-Instabilität magnetohydrodynamischer Fluide durchgeführt, wie sie zum Beispiel bei Landau [42], Sen [71] oder Axford [8],[9] zu finden ist.

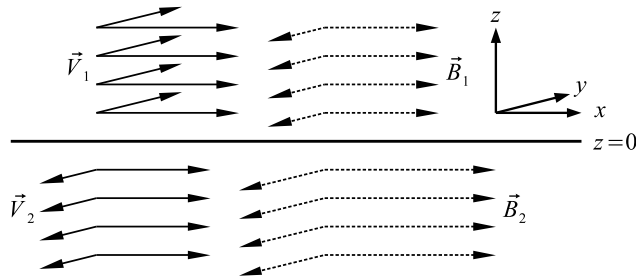


Abbildung 3.3: Strömung zur Kelvin-Helmholtz-Instabilität MHD, 3d

Als Ergebnis der Stabilitätsanalyse erhält man eine Verallgemeinerung der Neu-

tralitätskurve: Eine Neutralitätsfläche, die neben den Beträgen auch von den relativen Richtungen der involvierten Vektoren abhängt. Wie in Abbildung (3.3) angedeutet, besitzen Geschwindigkeits- und Magnetfeld des Grundzustands keine Komponenten in z -Richtung. Es wird gezeigt, dass die Übergangsbedingungen an der Trennfläche für einen stationären Strömungszustand das Verschwinden dieser Komponenten fordern.

Die Parallelströmungen sind durch die ebene Fläche bei $z = 0$ voneinander getrennt. Die obere Plasmaströmung nimmt den Halbraum $z > 0$, die untere den Halbraum $z < 0$ ein. Die Strömungen sind also in x - und y -Richtung nicht begrenzt und erstrecken sich in diesen beiden Koordinaten bis ins Unendliche.

Die konstanten Feldgrößen der Grundzustands in beiden Teilströmungen werden ab sofort durch Großbuchstaben mit untenstehenden Indizes voneinander unterschieden. \vec{V}_1 beschreibt beispielsweise das Geschwindigkeitsfeld der oberen Strömung und \vec{B}_2 die magnetische Induktion der unteren.

Die konstanten Geschwindigkeits- und magnetische Induktionen des Grundzustands lauten in kartesischen Koordinaten folgendermaßen:

$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{B}_2 = \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die konstanten Felder der beiden Teilströmungen erfüllen in trivialer Weise die Feldgleichungen (1.56) und (1.57). Für die Berechnung der Übergangsbedingungen benötigt man den Normaleneinheitsvektor der Trennfläche. Er lautet für den ungestörten Zustand im gewählten Bezugssystem:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die kinematische Sprungbedingung (A.3) verbietet eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Trennfläche. Es gilt also für beide Teilströmungen:

$$W_1 = W_2 = 0. \quad (3.4)$$

Die dynamische Sprungbedingung für die Grundströmung (A.24) besagt, dass die Normalspannung auf beiden Seiten gleich sein muss, wenn keine Oberflächenspannung wirkt. Dabei muss man den magnetischen Anteil an der Druckkraft berücksichtigen:

$$P_1 + \frac{1}{2\mu_1} (A_1^2 + B_1^2 - C_1^2) = P_2 + \frac{1}{2\mu_2} (A_2^2 + B_2^2 - C_2^2). \quad (3.5)$$

In der Literatur findet man gelegentlich Arbeiten, bei denen der magnetische Anteil fehlt. Die Sprungbedingungen an das elektrische und magnetische Feld vereinfachen sich für den Grundzustand, weil $\vec{v}_T = 0$:

$$||\vec{B}|| \cdot \vec{n} = 0, \quad (3.6)$$

$$||\vec{D}|| \cdot \vec{n} = \Sigma, \quad (3.7)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{E}|| = \vec{0}, \quad (3.8)$$

$$\vec{n} \times ||\vec{H}|| = \vec{J}_T. \quad (3.9)$$

Aus (3.6) folgt, dass die senkrecht auf der Trennfläche stehende Komponente der magnetischen Induktion stetig durch sie hindurchtreten muss (A.43):

$$C_1 = C_2 = C. \quad (3.10)$$

Um die elektrische Verschiebung \vec{D} zu bestimmen, zieht man die Materialgleichung (1.30) heran. Diese Gleichung gilt nur im Ruhesystem des betrachteten Mediums. Das elektrische Feld verschwindet jedoch in den Ruhesystemen, da in beiden Teilströmungen bei konstanten Magnetfeldern kein elektrischer Strom \vec{j} fließt, der nach dem Ohmschen Gesetz mit dem elektrischen Feld \vec{E} verknüpft ist. Ohne Stromdichte \vec{j} gibt es kein elektrisches Feld \vec{E} . Dieser Zusammenhang gilt auch für Fluide mit endlicher elektrischer Leitfähigkeit σ .

Wenn \vec{D} im Ruhesystem 0 ist, dann nach der Galilei-Transformation (1.45) auch in jedem anderen Bezugssystem, welches sich mit einer konstanten relativen Geschwindigkeit bewegt. Auf der Trennfläche gibt es daher im Grundzustand keine Oberflächenladungen:

$$\Sigma = 0. \quad (3.11)$$

Ein relativ zum ruhenden Fluid bewegter Beobachter nimmt ein elektrisches Feld wahr. Ein Beobachter, der sich mit einer Teilströmung mitbewegt, sieht also in der anderen Teilströmung ein elektrisches Feld. Die Sprungbedingung (3.8) an die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes äußert sich in den gewählten Koordinaten wie folgt:

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \cdot \vec{e}_x = 0, \quad (3.12)$$

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 \right) \cdot \vec{e}_y = 0. \quad (3.13)$$

Das elektrische Feld für einen ruhenden Beobachter, für den die Strömung eine Geschwindigkeit V besitzt, lautet:

$$\vec{E} = -\vec{V} \times \vec{B} = - \begin{pmatrix} -VC \\ UC \\ AV - UB \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Zusammen mit der Stetigkeitsbedingung der senkrechten Komponente der magnetischen Induktion (3.10) ergeben sich folgende einschränkende Bedingungen an die Teilströmungen:

$$C(V_2 - V_1) = 0, \quad (3.15)$$

$$C(U_2 - U_1) = 0. \quad (3.16)$$

Eine Komponente der magnetischen Induktion senkrecht zur Trennfläche C fordert einen stetigen Übergang der Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit U und V . Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit senkrecht zur Grenzfläche gerichteter magnetischer Induktion ist kein erlaubter stationärer Strömungszustand. Weiss hat in seiner Arbeit [83] gezeigt, dass eine Wirbelströmung mit Elementen der Kelvin-Helmholtz-Instabilität das Magnetfeld aus ihrem Inneren verdrängt. Man kann auch von außen kein elektrisches Feld anlegen, um diese Bedingung zu erfüllen, da es keine statischen elektrischen Felder mit einer tangentialen Unstetigkeit gibt. Wenn man die Kelvin-Helmholtz-Instabilität von elektrisch

leitfähigen Fluiden im Magnetfeld untersuchen möchte, muss man auf die senkrechte Komponente der magnetischen Induktion verzichten:

$$C = 0. \quad (3.17)$$

Man findet hierzu eine Bemerkung bei Southwood [74] und eine Bedingung bei Gerwin [28]. Mit der Wahl zur Trennfläche tangential liegender magnetischer Induktionen verschwindet in jedem relativ zu den ruhenden Teilströmungen bewegten Bezugssystemen das elektrische Feld in x - und y -Richtung (3.14). Axford [8] betrachtete Strömungen ohne induziertes elektrisches Feld. Dann liegen sämtliche magnetische Induktionen und Geschwindigkeitsvektoren parallel wie im zweidimensionalen Fall. Auf die Oberflächenladungen hat das induzierte elektrische Feld aber nach (3.7) keinen Einfluss, nicht wie in [9] behauptet.

Ein Sprung in der Tangentialkomponente des Magnetfeldes ist mit einem Oberflächenstrom \vec{J}_T verknüpft. Springt die x -Komponente des Magnetfeldes, fließt ein Oberflächenstrom in y -Richtung.

An einer ebenen Trennfläche gelten dann für die Größen des Grundzustands die Relationen:

$$W = 0, \quad (3.18)$$

$$\|P + \frac{1}{2\mu} (A^2 + B^2)\| = 0, \quad (3.19)$$

$$C = 0, \quad (3.20)$$

$$\Sigma = 0, \quad (3.21)$$

$$-\|\frac{B}{\mu}\| = \vec{J}_T \cdot \vec{e}_x, \quad (3.22)$$

$$\|\frac{A}{\mu}\| = \vec{J}_T \cdot \vec{e}_y. \quad (3.23)$$

Aus den Übergangsbedingungen des elektromagnetischen Feldes folgte, dass es keine senkrechte Komponente der magnetischen Induktion für den Grundzustand bei der Betrachtung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität geben kann. Die Oberflächenladungen müssen nach den Gesetzen der Elektrodynamik verschwinden. Der Oberflächenstrom kann über (3.9) bestimmt werden. Für das Aufstellen der Dispersionsrelation $\omega(k)$ reichen die kinematische und dynamische Übergangsbedingung aus. Das ist der Grund, warum den elektromagnetischen Übergangsbedingungen in der Literatur kaum Beachtung geschenkt wird. Der Grundzustand der Strömung muss sie allerdings erfüllen.

3.1 Lineare Stabilitätsanalyse

Für den Grundzustand (3.2) der Strömung, der die Übergangsbedingungen (3.18) bis (3.23) erfüllt, kann man die Stabilität bezüglich Störungen hinreichend kleiner Amplitude untersuchen. Dazu betrachtet man einen gestörten Zustand und prüft, ob die Störung räumlich oder zeitlich anwächst.

Die konstanten Magnet- und Geschwindigkeitsfelder gehen mit einer ebenen Trennfläche bei $z = 0$ einher. Eine für die Stabilität relevante Störung des Magnet- oder Geschwindigkeitsfeldes ist mit einer räumlich und zeitlich veränderlichen Deformation dieser Trennfläche verknüpft.

Die Stabilität des Strömungszustands richtet sich nach dem Verhalten der Trennfläche. Was geschieht mit kleinen Störungen der Trennfläche? Um beliebige Störungen der Trennfläche zu untersuchen, genügt es, das Verhalten von trigonometrischen Funktionen in Abhängigkeit vom Wellenvektor \vec{k} zu untersuchen, mit denen jede beliebige Störung aufgebaut werden kann.

Ist die Amplitude der Trennflächenauslenkung im Verhältnis zu ihrer Wellenlänge klein, kann man einen Entwicklungsparameter ε definieren. Die kinematische Übergangsbedingung in kartesischen Koordinaten (2.12) lautet für eine Seite:

$$\dot{s} + U s_x + u s_x + V s_y + v s_y = w, \quad (3.24)$$

wobei u und v Störungen der vorgegebenen Geschwindigkeiten U und V mit $\frac{|u|}{|U|} \ll 1$ und $\frac{|v|}{|V|} \ll 1$ sind und $s(x, y, t)$ die Auslenkung der Sprungfläche aus der Ruhelage bei $z = 0$ beschreibt, siehe Abbildung (2.1).

Setzt man für die Auslenkung die Größenordnung H , für die räumlichen und zeitlichen Skalen L und T und für die Geschwindigkeit V_χ und die Störungen der Geschwindigkeit εV_χ an, lautet die entdimensionierte Bedingung in den dimensionslosen gestrichelten Variablen:

$$\frac{H}{T} \dot{s}' + V_\chi \frac{H}{L} U' s'_x + \varepsilon V_\chi \frac{H}{L} u' s'_x + V_\chi \frac{H}{L} V' s'_y + \varepsilon V_\chi \frac{H}{L} v' s'_y = \varepsilon V_\chi w'. \quad (3.25)$$

Die Geschwindigkeit der zeitlichen Änderung der Auslenkung kann mit $\frac{H}{T} = V_s$ bezeichnet werden. Dann gilt mit $\varepsilon = \frac{V_s}{V_\chi} = \frac{H}{L}$ die Gleichung:

$$\varepsilon \{ \dot{s}' + U' s'_x + V' s'_y + \varepsilon (u' s'_x + v' s'_y) \} = \varepsilon w'. \quad (3.26)$$

Die Wahl von $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$ entspricht einer Langwellenapproximation. Die Größenordnung der Amplitude H ist kleiner als die Wellenlänge L . Die erste Ordnung entspricht einer Linearisierung des Gleichungssystems. Zunächst wollen wir mit den dimensionsbehafteten Variablen weiterarbeiten.

Die Trennfläche $s(x, y, t)$ wird nach dem Entwicklungsparameter ε angesetzt:

$$s(x, y, t) = \varepsilon s_1(x, y, t) + \varepsilon^2 s_2(x, y, t) + \varepsilon^3 s_3(x, y, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (3.27)$$

Eine Störung der Trennfläche ist über die kinematischen Sprungbedingungen mit den z -Komponenten der Geschwindigkeitsfelder der beiden Strömungen verknüpft. Die Auslenkung der Trennfläche überträgt sich auf die Feldgrößen beider Störungen. Für die erste Störungsordnung wird für die Trennfläche ein monochromatischer Wellenzug mit reellen Konstanten k, l und noch zu bestimmender Kreisfrequenz ω angesetzt:

$$s_1(x, y, t) = S_1 e^{i(kx + ly - \omega t)} + c.c. . \quad (3.28)$$

Die Abkürzung *c.c.* steht für complex conjugate und bedeutet das komplex Konjugierte des ausgeschriebenen Wellenzugs. Für die Geschwindigkeits- und Induktionsfelder gelten entsprechende Ansätze:

$$\vec{v} = \vec{V} + \varepsilon \vec{v}_1 + \varepsilon^2 \vec{v}_2 + \varepsilon^3 \vec{v}_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (3.29)$$

$$\vec{b} = \vec{B} + \varepsilon \vec{b}_1 + \varepsilon^2 \vec{b}_2 + \varepsilon^3 \vec{b}_3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (3.30)$$

Die z -Komponente der vorgegebenen konstanten Größen \vec{V} und \vec{B} ist 0. Die Feldgleichungen (1.56) und (1.57) lauten in erster Ordnung:

$$\dot{\vec{v}}_1 + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \frac{1}{\mu\rho} (\nabla \times \vec{b}_1) \times \vec{B}, \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad (3.31)$$

$$\dot{\vec{b}}_1 + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{b}_1 = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v}_1, \quad \nabla \cdot \vec{b}_1 = 0. \quad (3.32)$$

Das Gleichungssystem lässt sich auf eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für \vec{v}_1 oder \vec{b}_1 reduzieren:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right)^2 - \left(\frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu\rho}} \cdot \nabla \right)^2 \right\} \Delta \vec{v}_1 = \vec{0}. \quad (3.33)$$

Zwischen den geschweiften Klammern steht ein Wellenoperator, der das Verhalten der Störungen bezüglich des Laborsystems beschreibt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle im mitbewegten Koordinatensystem ist die Alfvén-geschwindigkeit

$$\vec{c}_A = \frac{\vec{B}}{\sqrt{\mu\rho}}. \quad (3.34)$$

Sie hängt vom Betrag und der Lage des Wellenvektors \vec{k} zu den Magnetfeldlinien ab. Gleichung (3.33) ist gültig, wenn entweder der Wellenoperator in der geschweiften Klammer

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right)^2 - \frac{1}{\mu\rho} (\vec{B} \cdot \nabla)^2 \right\} \vec{v}_1 = 0 \quad (3.35)$$

oder die Laplace-Gleichung

$$\Delta \vec{v}_1 = 0 \quad (3.36)$$

erfüllt ist. Für die Rotation des Geschwindigkeits- und Induktionsfeldes lässt sich aus den Feldgleichungen erster Ordnung eine entsprechende Gleichung herleiten:

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right)^2 - \frac{1}{\mu\rho} (\vec{B} \cdot \nabla)^2 \right\} \nabla \times \vec{v}_1 = \vec{0}. \quad (3.37)$$

Nach dieser Gleichung sind die Lösungen der Laplace-Gleichung drehungsfrei. Grundzustände zeichnen sich durch Magnetfelder aus, die parallel zur unausgelenkten Trennfläche bei $z = 0$ ausgerichtet sind. Die Alfvénwellengleichung (3.35) zeigt, dass sich Störungen entlang der Magnetfeldlinien ausbreiten. Die Dispersionsrelation für eine freie Alfvénwelle $\propto e^{i(kx+ly+mz-\omega_A t)}$ lautet dementsprechend:

$$(-\omega_A + Uk + Vl)^2 - \left(\frac{Ak}{\sqrt{\mu\rho}} + \frac{Bl}{\sqrt{\mu\rho}} \right)^2 = 0. \quad (3.38)$$

Die kinematische Übergangsbedingung schließt die Alfvénwellen, deren Amplitude eine Komponente senkrecht zur Trennfläche aufweisen, aus, da diese mit einer Auslenkung der Trennfläche einhergehen. Die Auslenkung der Sprungfläche wird aber in beiden Strömungen im allgemeinen mit einer anderen Geschwindigkeit in eine andere Richtung transportiert, da die Magnetfelder und Geschwindigkeiten des Grundzustands nicht übereinstimmen müssen. Die Alfvénwellen,

die keine Komponente in z -Richtung aufweisen, sind Lösungen für eine glatte nicht ausgelenkte Trennfläche. Diese voneinander unabhängigen Wellenlösungen erfüllen die Übergangsbedingungen. Ein Oberflächenstrom kompensiert dabei die magnetische Wirkung auf die jeweils andere Strömung. Im Gegensatz zu den Laplace-Lösungen geht mit den Wellenlösungen eine elektrische Stromdichte \vec{j}_1 einher, da die Rotation des Magnetfelds nicht verschwindet. Die Quelle dieser Wellenlösungen liegt nicht in der Trennfläche, sondern im Unendlichen. Die Alfvénwelle transportiert Energie nur parallel zur Trennfläche. Die Gruppengeschwindigkeit senkrecht zur Trennfläche der freien Alfvénwellen ist 0:

$$\frac{\partial \omega_A}{\partial m} = 0. \quad (3.39)$$

Diese Wellenlösungen haben keinen Einfluss auf die Stabilitätsanalyse, da ω_A durch die Dispersionsrelation (3.38) in beiden Strömungen gegeben ist und bei vorgegebenen reellen Wellenzahlkomponenten k und l reell bleibt für alle Geschwindigkeiten und Magnetfelder:

$$\omega_{A\pm} = Uk + Vl \pm \left(\frac{Ak}{\sqrt{\mu\rho}} + \frac{Bl}{\sqrt{\mu\rho}} \right). \quad (3.40)$$

Die für die Stabilität der Parallelströmungen entscheidenden Störungen sind Lösungen der Laplace-Gleichung (3.36) und divergenz- und drehungsfrei:

$$\nabla \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad \nabla \times \vec{v}_1 = \vec{0}, \quad (3.41)$$

$$\nabla \cdot \vec{b}_1 = 0, \quad \nabla \times \vec{b}_1 = \vec{0}. \quad (3.42)$$

Diese Relationen sind ausdrücklich auch für drei Raumdimensionen gültig.

Die Feldgleichungen für die relevanten Störungen

Unter der Berücksichtigung der Erkenntnisse aus dem vorherigen Kapitel vereinfachen sich die Feldgleichungen der Strömungen noch einmal. Die Impulsbilanz (1.56) und die Induktionsgleichung (1.57) reduzieren sich auf:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{v}_1 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1, \quad (3.43)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \right) \vec{b}_1 = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v}_1. \quad (3.44)$$

Mit der Impulsbilanz kann man den Druck p_1 bestimmen. Die Induktionsgleichung bestimmt das Verhältnis zwischen Geschwindigkeits- \vec{v}_1 und Induktionsstörung \vec{b}_1 . Beide Gleichungen spielen eine untergeordnete Rolle. In beiden Teilströmungen muss die Laplace-Gleichung für jede Störung gelten:

$$\Delta \vec{v}_1 = 0, \quad \Delta \vec{b}_1 = 0, \quad \Delta p_1 = 0. \quad (3.45)$$

Über die kinematische Sprungbedingung wird die Auslenkung der Trennfläche mit der senkrechten Geschwindigkeitskomponente w_1 in beiden Strömungen verknüpft. Mit den gemachten Ansätzen gilt:

$$\dot{s}_1 + U s_{1x} + V s_{1y} = w_1. \quad (3.46)$$

Damit liegt die Geschwindigkeitskomponente w_1 bei $z = 0$ fest. Soll die Lösung zusätzlich beschränkt sein, muss man das Vorzeichen gewählt werden, dass die Lösung bis ins Unendliche hinein abklingen lässt. Für die beiden Strömungsbe-
reiche gilt:

$$w_1^{(1)} = i(-\omega + U_1 k + V_1 l) S_1 e^{i(kx+ly-\omega t)} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.47)$$

$$w_1^{(2)} = i(-\omega + U_2 k + V_2 l) S_1 e^{i(kx+ly-\omega t)} e^{\kappa z} + c.c. \quad (3.48)$$

mit dem Betrag des Wellenzahlvektors:

$$\kappa = |\sqrt{k^2 + l^2}|. \quad (3.49)$$

Die Störung breitet sich entlang der Trennfläche aus und klingt exponentiell normal zur Sprungfläche ab. Kürzere Wellen klingen schneller ab als längere. Die Feldgleichungen und Forderungen an die Felder gestatten es, sämtliche Felder zu berechnen.

Feldgrößen erster Ordnung

Mit der Abkürzung

$$\varphi = kx + ly - \omega t \quad (3.50)$$

für die Phase der Trennflächenwelle ergeben sich für die obere Teilströmung die Felder:

$$u_1^{(1)} = (-\omega + U_1 k + V_1 l) \frac{k}{\kappa} S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.51)$$

$$v_1^{(1)} = (-\omega + U_1 k + V_1 l) \frac{l}{\kappa} S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.52)$$

$$w_1^{(1)} = i(-\omega + U_1 k + V_1 l) S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.53)$$

$$a_1^{(1)} = (A_1 k + B_1 l) \frac{k}{\kappa} S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.54)$$

$$b_1^{(1)} = (A_1 k + B_1 l) \frac{l}{\kappa} S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.55)$$

$$c_1^{(1)} = i(A_1 k + B_1 l) S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.56)$$

$$p_1^{(1)} = -\rho_1 \frac{(-\omega + U_1 k + V_1 l)^2}{\kappa} S_1 e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \quad (3.57)$$

$$\vec{j}_1^{(1)} = \nabla \times \vec{b}_1^{(1)} = \vec{0}. \quad (3.58)$$

Die Felder der unteren Teilströmung erhält man, indem man κ durch $-\kappa$ und die betreffenden physikalischen Größen ersetzt. Das elektrische Feld ist in den Ruhesystemen beider Teilströmungen 0. In den Teilströmungen existiert keine elektrische Stromdichte, da die Magnetfelder drehungsfrei sind. Die Komponenten des Magnet- und Geschwindigkeitsfeldes in der xy -Ebene a_1 und b_1 bzw. u_1 und v_1 , sowie die Druckstörung p_1 sind proportional zur Auslenkung s_1 .

Dispersionsrelation des linearisierten Problems

Die dynamische Übergangsbedingung liefert bei gegebenen Wellenzahlen k und l die Dispersionsrelation $\omega(k, l)$. Die dynamische Sprungbedingungen erster Ordnung (A.25) kann man dem Anhang entnehmen. Der Sprung in der Druckstörung

ist gleich der an der Trennfläche wirkenden Oberflächenspannung (A.29) und Schwerkraft (A.34):

$$||p_1 + \frac{A}{\mu}a_1 + \frac{B}{\mu}b_1|| = T_\sigma (s_{1xx} + s_{1yy}) + g||\rho||s_1. \quad (3.59)$$

Der Gesamtdruck der beiden Teilströmungen besteht aus dem mechanischen und magnetischen Druck. Die Größen p_1, a_1 und b_1 sind proportional zu S_1 . Man erhält für beliebige Auslenkungen S_1 eine quadratische Gleichung in ω :

$$\begin{aligned} \frac{F(\omega, k, l)}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \rho_1(-\omega + U_1k + V_1l)^2 + \rho_2(-\omega + U_2k + V_2l)^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{\mu_1}(A_1k + B_1l)^2 - \frac{1}{\mu_2}(A_2k + B_2l)^2 \right\} - T_\sigma \kappa^2 - g(\rho_2 - \rho_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Der Faktor κ wurde eingeführt, damit die Ergebnisse mit denen Weissmans [82] übereinstimmen. Sen [71] hat diese Bedingung aus einem Gleichungssystem siebter Ordnung in ω gewonnen. Sein Gleichungssystem besteht aus den beiden Wellengleichungen der Teilströmungen und drei unabhängigen (eine dynamische und zwei kinematischen) Übergangsbedingungen. Vier Lösungen gehören zu den entkoppelten Alfvénlösungen (3.38) der Teilströmungen, die die Trennfläche un ausgelenkt lassen. Zusätzlich existiert noch eine triviale Lösung mit

$$\omega_T = \frac{1}{2} \frac{\rho_1(U_1k + V_1l) + \rho_2(U_2k + V_2l)}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (3.61)$$

die sich mit der Geschwindigkeit der Wirbelfläche mitbewegt. Nur die Lösungen der Gleichung (3.60) sind für die Stabilitätsanalyse relevant.

Die Dispersionsrelation lautet aufgelöst nach ω :

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} = \frac{(U_1k + V_1l)\rho_1 + (U_2k + V_2l)\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \left\{ -\frac{\rho_1\rho_2 \{(U_1 - U_2)k + (V_1 - V_2)l\}^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \right. \\ \left. + \frac{(A_1k + B_1l)^2}{\mu_1(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{(A_2k + B_2l)^2}{\mu_2(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{T_\sigma}{(\rho_1 + \rho_2)}\kappa^3 + g\frac{(\rho_2 - \rho_1)}{(\rho_1 + \rho_2)}\kappa \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Da der Betrag κ eines Wellenvektors immer positiv ist, ist die gewonnene Gleichung für verschwindende Strömungsgeschwindigkeiten U_1, U_2, V_1, V_2 und $l = 0$ symmetrisch in k . In diesem Fall gilt $\omega(k) = \omega(-k)$. Die entsprechende Symmetrie gilt auch für l , wenn $k = 0$. Für den Spezialfall $l = 0$ ergibt sich die bekannte Dispersionsrelation für zwei Dimensionen [15]. Ohne Magnetfeld und vorgegebene Strömungsgeschwindigkeiten nur in x -Richtung ergibt sich die Dispersionsrelation von Weissman [82].

Für eine bestimmte Ausbreitungsrichtung der Trennflächenwellen ist das Skalarprodukt aus \vec{k} und der Geschwindigkeitsdifferenz unter der Wurzel gleich 0, siehe auch die nachfolgende Abbildung. Dieser Fall entspricht einer Rayleigh-Taylor-Instabilität [15] mit zur Trennfläche parallelem Magnetfeld.

Die Rayleigh-Taylor-Instabilität kann im Gegensatz zur Kelvin-Helmholtz-Instabilität eine senkrechte Komponente der magnetischen Induktion aufweisen, da im Grundzustand keine tangentielle Diskontinuität der Geschwindigkeit vorliegt (3.15),(3.16).

Mit der Berücksichtigung aller drei Raumrichtungen, treten geometrische Effekte durch die unterschiedlichen Richtungen der Geschwindigkeits- und Magnetfelder auf. Diese werden in der Formel durch Skalarprodukte mit dem Wellenvektor realisiert.

Die Radikanten in der geschweiften Klammer entscheiden über die lineare zeitliche Stabilität der Strömung. Ist die Summe in der Klammer negativ, besitzt die quadratische Gleichung zwei komplexe Lösungen ω_{\pm} . Eine davon ω_+ gehört zu einer zeitlich exponentiell anwachsenden Lösung, die den Grundzustand linear instabil macht.

Der erste Term in der geschweiften Klammer ist der einzige, der negativ in

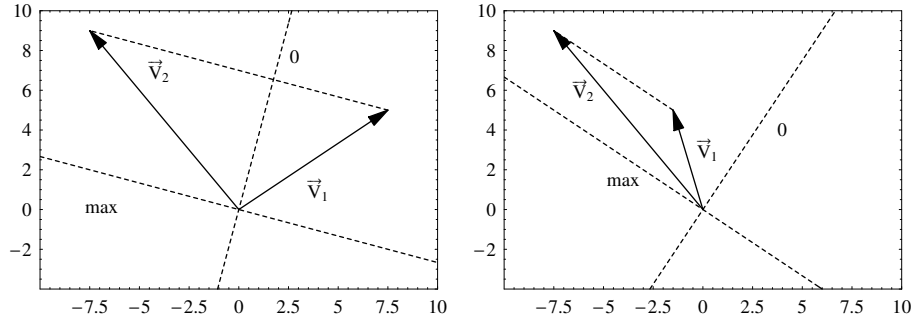


Abbildung 3.4: Die xy -Ebene von oben. In den zwei Beispielen sind die Geschwindigkeiten des Grundzustands \vec{V}_1 und \vec{V}_2 der Teilströmungen und die entsprechenden Ausbreitungsrichtungen der Oberflächenwellen (gestrichelt), bei denen $-\frac{\rho_1 \rho_2 \{(U_1 - U_2)k + (V_1 - V_2)l\}^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}$ extremal wird, eingezeichnet.

die Summe unter der Wurzel eingeht. Für gegebene Geschwindigkeitsdifferenzen $U_2 - U_1$ und $V_2 - V_1$ gibt es zwei ausgezeichnete Richtungen in der ebenen Trennfläche, bei denen dieser Term Extrema besitzt, wie in Abbildung (3.4) gezeigt. Steht der Wellenvektor \vec{k} senkrecht auf dem Vektor der Geschwindigkeitsdifferenz, verschwindet der Term in der Dispersionsrelation (Rayleigh-Taylor-Instabilität). Für diese ausgezeichnete Richtung sind alle Wellen für $\rho_2 > \rho_1$ linear stabil. Liegt der Wellenvektor senkrecht zu dieser Richtung, weist der Term ein Maximum auf.

Ähnlich verhält es sich mit den beiden nächsten Termen unter der Wurzel und der Lage des Wellenvektors. Im Unterschied zu den Geschwindigkeitsfeldern geht jedes Magnetfeld für sich in die Dispersionsrelation mit ein. Steht der Wellenvektor senkrecht zu den Magnetfeldlinien einer Teilströmung verschwindet der betreffende Term unter der Wurzel. Zwei Beispiele werden in Abbildung (3.5) gezeigt. Im rechten Bild sieht man, dass es bei parallel liegenden Magnetfeldern eine ausgezeichnete Richtung gibt, bei der es keinen stabilisierenden Einfluss gibt.

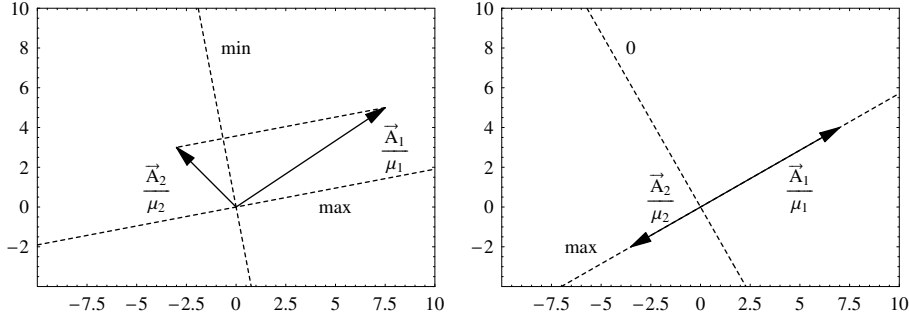


Abbildung 3.5: Die Trennfläche von oben. In den zwei Beispielen sind die Magnetfelder $\frac{\vec{B}_1}{\mu_1}$ und $\frac{\vec{B}_2}{\mu_2}$ der Teilströmungen und die entsprechenden Ausbreitungsrichtungen der Oberflächenwellen (gestrichelt), bei denen $\frac{(A_1 k + B_1 l)^2}{\mu_1(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{(A_2 k + B_2 l)^2}{\mu_2(\rho_1 + \rho_2)}$ extremal wird, eingezeichnet.

Die Lage der Magnetfelder bestimmen nach der Übergangsbedingung (3.23) und wie in Abbildung (3.6) skizziert den Oberflächenstrom des Grundzustands.

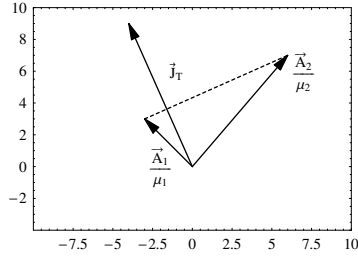


Abbildung 3.6: Der Oberflächenstrom \vec{J}_T (3.9) ist durch die Magnetfelder gegeben und steht senkrecht auf deren Differenz

Die durch (3.62) beschriebenen Wellen breiten sich entlang der Trennfläche aus. Mit der Hinzunahme der zusätzlichen Raumdimension wird deutlich, dass die Wellenbewegung nicht an die Magnetfeldlinien gebunden ist. Sie kann in jede Richtung in der Ebene erfolgen, nur der Einfluss der Strömungsgeschwindigkeiten und Magnetfelder ändert sich, wie man in den Abbildungen (3.4) und (3.5) erkennt.

Will man mit den angelegten Magnetfeldern die Strömung stabilisieren, so muss man sie möglichst parallel zum Geschwindigkeitsdifferenzvektor ausrichten. Wellen, die sich senkrecht zu den Magnetfeldlinien ausbreiten und keine Rückstellkraft durch das Magnetfeld erfahren, sind dann ebenfalls auch keiner destabilisierenden Kraft durch die Geschwindigkeitsdifferenz ausgesetzt.

Ohne die Effekte durch die Oberflächenspannung und die Schwerkraft, aber mit gleichen Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ und der Abkürzung $\bar{\rho} = 2 \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ lautet die Bedingung für lineare Stabilität:

$$\{(U_1 - U_2)k + (V_1 - V_2)l\}^2 < \frac{2}{\mu \bar{\rho}} \{(A_1 k + B_1 l)^2 + (A_2 k + B_2 l)^2\}. \quad (3.63)$$

Teilt man diese Gleichung durch den Quadratsbetrag des Wellenvektors, erhält man eine richtungsabhängige Stabilitätsbedingung, die Todd [78] nur durch Auswertung einer Kräftebilanz für ein infinitesimales Flüssigkeitsteilchen abgeleitet hat. Zentrifugalkraft und die magnetische Spannung der Magnetfeldlinien konkurrieren miteinander. Aus der gewonnenen Ungleichung gewinnt man mit $\vec{V}_D = (U_1 - U_2, V_1 - V_2)$ die Form der Stabilitätsbedingung von Landau und Lifschitz [44]:

$$\mu\bar{\rho}\vec{V}_D^2 < 2 \left(|\vec{B}_1|^2 + |\vec{B}_2|^2 \right), \quad (3.64)$$

$$\left(\vec{B}_1 \times \vec{B}_2 \right)^2 < \mu\bar{\rho} \left\{ \left(\vec{B}_1 \times \vec{V}_D \right)^2 + \left(\vec{B}_2 \times \vec{V}_D \right)^2 \right\}. \quad (3.65)$$

Sen [71] hat in seiner Arbeit die erweiterte Bedingung, die Schwerkraft und Oberflächenspannung miteinschließt, aufgestellt. Das Kelvin-Helmholtz-Problem in drei Raumrichtungen ist komplex. Es gibt fünf vektorielle Größen, die untereinander unterschiedliche Winkel besitzen können. Dies sind die vorgegebenen Geschwindigkeiten und Magnetfelder in den beiden Teilströmungen und der Wellenvektor der Störung. Es ist zweckmäßig, einen der Vektoren auf eine

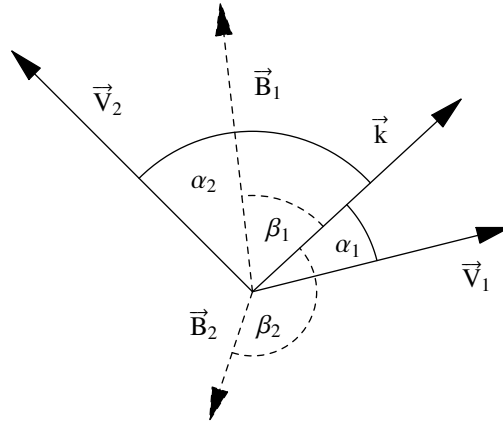


Abbildung 3.7: Im allgemeinen Strömungszustand bildet der Wellenvektor \vec{k} vier verschiedene Winkel zu den gegebenen Geschwindigkeiten und magnetischen Induktionen des Grundzustands.

Raumrichtungsachse auszurichten und die Lage der anderen Vektoren relativ zu diesem zu beschreiben. Wenn man den Wellenvektor $\vec{k} = (k, l, 0)$ mit dem Betrag $|\vec{k}| = \kappa$ wie in Abbildung (3.7) als Bezugsgröße festlegt und die relative Lage der Stromlinien und Ausrichtungen der magnetischen Induktionen der Grundströmung mit den Winkeln α_1 und α_2 bzw. β_1 und β_2 angibt, dann lautet die Dispersionsrelation (3.62) mit $\kappa > 0$ (3.49):

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} = & |\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \kappa + |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \kappa \\ & \pm \left\{ -\frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \left(|\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) - |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \right)^2 \kappa^2 + c_{A_1}^2 \cos^2(\beta_1) \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \kappa^2 \right. \\ & \left. + c_{A_2}^2 \cos^2(\beta_2) \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \kappa^2 + \frac{T_\sigma}{\rho_1 + \rho_2} \kappa^3 + g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \kappa \right\}^{1/2}. \quad (3.66) \end{aligned}$$

Die Alfvéngeschwindigkeiten sind durch $c_{A_1}^2 = \frac{\vec{B}_1^2}{\mu_1 \rho_1}$ und $c_{A_2}^2 = \frac{\vec{B}_2^2}{\mu_2 \rho_2}$ gegeben. Für die Strömungsgeschwindigkeiten und Magnetfelder gilt, dass nur die Anteile parallel zum Wellenvektor \vec{k} für die Stabilität relevant sind. Gegebene Strömungsgeschwindigkeiten $|\vec{V}_1|$ und $|\vec{V}_2|$ haben den größten Einfluss auf eine Welle, wenn sie parallel bzw. antiparallel ($\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pi$) zum Wellenvektor liegen. Dann ist

$$|\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) - |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) = |\vec{V}_1| + |\vec{V}_2| \quad (3.67)$$

maximal. Es gibt immer eine ausgezeichnete Richtung, für die die Strömungsgeschwindigkeiten keinen Einfluss auf die Stabilität haben. In dieser Richtung liegt die Rayleigh-Taylor-Instabilität vor. Wenn man den Winkel $\alpha_2 = \alpha_1 + \gamma$ setzt, wobei der Winkel γ der Winkel zwischen den beiden Strömungsgeschwindigkeiten der Teilströmungen ist, dann lautet der erste Term unter der Wurzel:

$$|\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) - |\vec{V}_2| \cos(\alpha_1 + \gamma). \quad (3.68)$$

Für einen gegebenen Winkel γ lässt sich immer ein Winkel α_1 finden, der die Differenz zu 0 erfüllt:

$$\gamma = \arccos \left(\frac{|\vec{V}_1|}{|\vec{V}_2|} \cos(\alpha_1) \right) - \alpha_1. \quad (3.69)$$

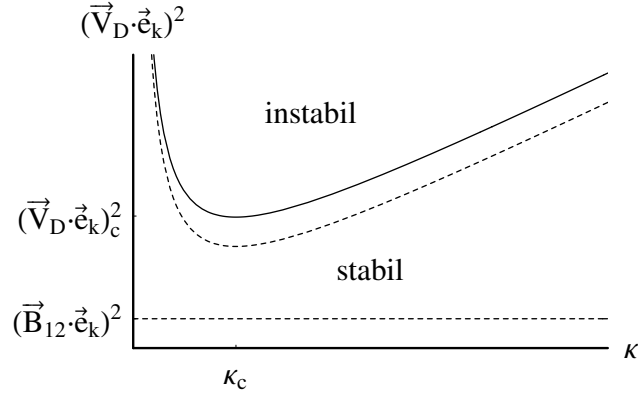
Wenn der Winkel zwischen beiden Strömungsgeschwindigkeiten $\gamma = \frac{\pi}{2}$ beträgt, bestimmt die Gleichung

$$\tan(\alpha_1) = \frac{|\vec{V}_1|}{|\vec{V}_2|} \quad (3.70)$$

den Winkel α_1 , der die Richtung des Wellenvektors relativ zu den Strömungsgeschwindigkeiten angibt, bei der die Rayleigh-Taylor-Instabilität vorliegt. Senkrecht dazu verläuft die Welle, die den größtmöglichen destabilisierenden Einfluss der Kelvin-Helmholtz-Instabilität erfährt.

Oberflächenspannung und Schwerkraft wirken in jeder Richtung gleich und richten sich nur nach dem Betrag des Wellenvektors. Für jede Richtung des Wellenvektors mit dem Betrag κ gilt eine andere Neutralitätskurve:

$$\begin{aligned} & \left(|\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) - |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \right)^2 = \\ & \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(c_{A_1}^2 \cos^2(\beta_1) \rho_1 + c_{A_2}^2 \cos^2(\beta_2) \rho_2 + T_\sigma \kappa + g (\rho_2 - \rho_1) \frac{1}{\kappa} \right). \quad (3.71) \end{aligned}$$



Abbildungung 3.8: Neutralitätskurve zur Kelvin-Helmholtz-Instabilität in der MHD in drei Raumrichtungen. Für jede Richtung des Wellenvektors \vec{e}_k gilt eine andere Neutralitätskurve.

Mit $\vec{B}_{12} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} (\vec{c}_{A1} \sqrt{\rho_1} + \vec{c}_{A2} \sqrt{\rho_2})$ und dem Einheitsvektor in Richtung des Wellenvektors $\vec{e}_k = \frac{1}{\kappa} \vec{k}$ ist die Neutralitätskurve in Abbildung (3.8) zu sehen. Das Minimum aller Neutralitätskurven (3.71) ist durch die Oberflächenspannung, den Massendichten und der Schwerkraft bestimmt und liegt bei dem kritischen Wellenzahlbetrag

$$\kappa_c = \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T_\sigma}}. \quad (3.72)$$

Für $\kappa < \kappa_c$ stabilisiert die Schwerkraft, für $\kappa > \kappa_c$ die Oberflächenspannung. Die Geschwindigkeitsdifferenz, bei der der kritische Wert erreicht wird, liegt bei

$$\left(|\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) - |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \right)_c^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(c_{A1}^2 \cos(\beta_1)^2 \rho_1 + c_{A2}^2 \cos(\beta_2)^2 \rho_2 + 2T_\sigma \sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T_\sigma}} \right). \quad (3.73)$$

Bleibt die Geschwindigkeitsdifferenz unterhalb dieses Wertes, ist die Strömung für alle Beträge κ mit der ausgewählten Richtung stabil. Die Ausrichtung der Magnetfelder setzt den Eintrittspunkt in die Stabilität für alle κ richtungsabhängig nach oben. Sen [71] gibt in seinem gewählten Bezugssystem die Richtung der Wellenbewegung an, die als erstes bei wachsender Geschwindigkeitsdifferenz instabil wird.

Gleichung (3.71) ist eine Verallgemeinerung der Neutralitätskurve für nur zwei Raumrichtungen. Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ und mit $|\vec{V}_1| = U_1, |\vec{V}_2| = U_2$, sowie $|\vec{B}_1| = A_1, |\vec{B}_2| = A_2$ erhält man die Neutralitätskurve aus Abbildung (3.2):

$$(U_1 - U_2)^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} \left(\frac{A_1^2}{\mu_1} + \frac{A_2^2}{\mu_2} + T_\sigma \kappa + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{1}{\kappa} \right). \quad (3.74)$$

Für verschwindende Magnetfelder ergibt sich die Neutralitätskurve der klassischen Kelvin-Helmholtz-Instabilität aus Abbildung (2).

Die Ausbreitung der Trennflächenwellen mit reellen ω erfolgt anisotrop und dispersiv. Die Komponenten der Gruppengeschwindigkeit der Trennflächenwellen lauten:

$$\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial k} = \frac{U_1 \rho_1 + U_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \frac{1}{2 \left(\omega - \frac{(U_1 k + V_1 l) \rho_1 + (U_2 k + V_2 l) \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)} \cdot \left\{ -2(U_1 - U_2) \frac{\rho_1 \rho_2 \{ (U_1 - U_2)k + (V_1 - V_2)l \}}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + 2A_1 \frac{(A_1 k + B_1 l)}{\mu_1 (\rho_1 + \rho_2)} + 2A_2 \frac{(A_2 k + B_2 l)}{\mu_2 (\rho_1 + \rho_2)} + \frac{T_{\sigma} \kappa^2 + g (\rho_2 - \rho_1) \frac{k}{\kappa}}{(\rho_1 + \rho_2)} \right\}, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial l} = \frac{V_1 \rho_1 + V_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \frac{1}{2 \left(\omega - \frac{(U_1 k + V_1 l) \rho_1 + (U_2 k + V_2 l) \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)} \cdot \left\{ -2(V_1 - V_2) \frac{\rho_1 \rho_2 \{ (U_1 - U_2)k + (V_1 - V_2)l \}}{(\rho_1 + \rho_2)^2} + 2B_1 \frac{(A_1 k + B_1 l)}{\mu_1 (\rho_1 + \rho_2)} + 2B_2 \frac{(A_2 k + B_2 l)}{\mu_2 (\rho_1 + \rho_2)} + \frac{T_{\sigma} \kappa^2 + g (\rho_2 - \rho_1) \frac{l}{\kappa}}{(\rho_1 + \rho_2)} \right\}. \quad (3.76)$$

Für verschwindende $U_2, V_1, V_2, A_1, A_2, B_1, B_2$ ergeben sich die Formeln von Weissman [82].

Die Auswirkung der Magnetfelder auf linear instabile Lösungen kann man für zwei Raumdimensionen an den expliziten Dispersionsrelationen $\omega_{\pm}(k)$ ablesen. In Abbildung (3.9) ist die Neutralitätskurve für verschieden starke Magnetfelder eines bestimmten Strömungszustands gezeichnet. Die Dispersionsrelationen

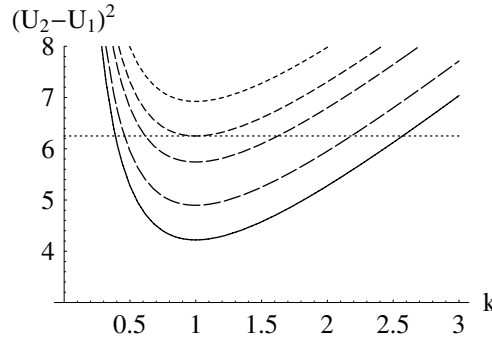


Abbildung 3.9: Neutralitätskurven verschieden starker Magnetfelder.

$\omega_{\pm}(k)$ werden entlang der gepunkteten waagerechten Linie für eine festgelegte Geschwindigkeitsdifferenz ausgewertet.

Die Schnittpunkte der Neutralitätskurve mit der Waagerechten markieren die Grenzen des instabilen k -Bereichs. Der Realteil (Abbildung (3.10)) verläuft im instabilen Bereich linear in k . Dabei handelt es sich um den ersten Teil der Dispersionsrelation (3.62) vor der Wurzel. Auf der Neutralitätskurve liegen die beiden Bifurkationspunkte, von denen sich die beiden Lösungsäste verzweigen.

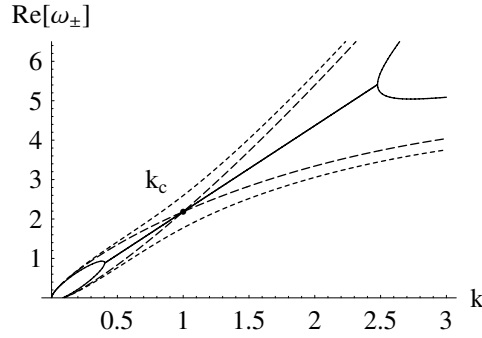


Abbildung 3.10: Realteile von ω_{\pm} für die unterste und zwei obersten Kurven aus Abbildung (3.9).

Mit stärkerem Magnetfeld wird der instabile Bereich kleiner und die Bifurkationspunkte rücken näher aneinander bis sie sich schließlich am kritischen Wert k_c treffen. Für noch stärkere Magnetfelder ist $\omega_{\pm}(k)$ für alle k linear stabil. Die beiden oberen Äste, die von den Bifurkationspunkten ausgingen, bilden nun wie die beiden unteren Äste eine stetige Kurve.

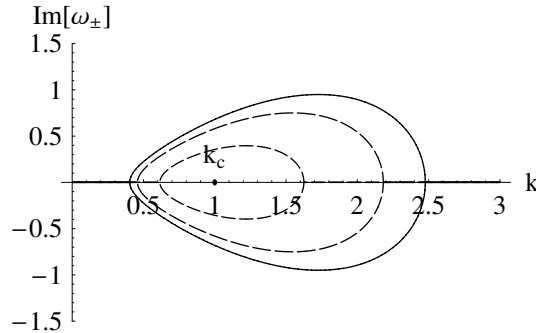


Abbildung 3.11: Imaginärteile von ω_{\pm} für die unteren drei Kurven aus Abbildung (3.9).

Die Imaginärteile von ω_{\pm} unterscheiden sich um ein Vorzeichen und besitzen ein Extremum, das von rechts für stärkere Magnetfelder nach links wandert. Die Kurven der Imaginärteile schrumpfen für stärkere Magnetfelder auf den kritischen Wert k_c zusammen.

Für linear stabile Wellen sind $\omega_{\pm}(k)$ rein reell. Die jeweiligen Gruppengeschwindigkeiten sind durch die Tangenten an die Kurven gegeben. Wie man in Abbildung (3.11) sieht, sind die Gruppengeschwindigkeiten an den beiden Bifurkationspunkten unendlich groß. Im kritischen Punkt k_c nehmen sie wieder endliche Werte an [82]. Die Oberflächenspannung sorgt dafür, dass für ausreichend große k die Wellen zu ω_{-} gegen die Strömung laufen. Hinreichend starke Magnetfelder trennen die beiden Kurven ω_{\pm} voneinander und unterstützen dieses Verhalten. Für $k < 0$ setzt sich die Kurve durch Drehspiegelung an der Ordinate fort, wie man der Abbildung (3.12) entnimmt.

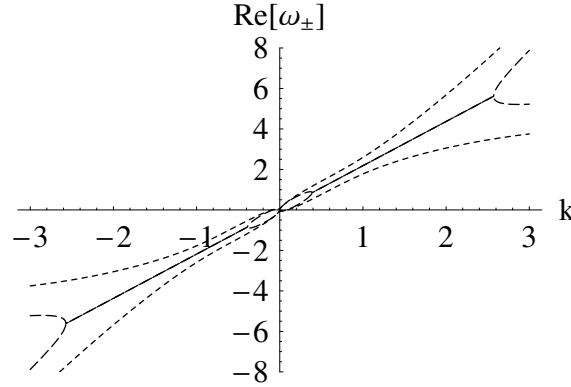


Abbildung 3.12: Realteile von ω_{\pm} der untersten und obersten Kurve aus Abbildung (3.9), auch für negative k .

3.1.1 Trennflächenladung und Trennflächenstrom

Die elektrische Ladung auf der Trennfläche ist durch die Sprungbedingung der Normalkomponente der elektrischen Verschiebung (A.53) gegeben. Die betrachteten Wellenbewegungen sind jedoch drehungsfrei, so dass die elektrische Stromdichte in den Teilströmungen verschwindet. Selbst bei Fluiden mit endlicher elektrischer Leitfähigkeit gibt es dann keine Störungen des elektrischen Feldes in den jeweiligen Ruhesystemen und damit auch keine Störungen der \vec{D} -Felder:

$$\sigma_1 = 0. \quad (3.77)$$

Der Trennflächenstrom ist durch die Sprungbedingungen der Tangentialkomponenten des Magnetfeldes (A.65) gegeben:

$$\vec{j}_{1T} = \begin{pmatrix} -\|\frac{b_1}{\mu}\| \\ \|\frac{a_1}{\mu}\| \\ -\|\frac{B}{\mu}\|s_{1x} + \|\frac{A}{\mu}\|s_{1y} \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

Der Trennflächenstrom besitzt keine Komponente senkrecht zur Trennfläche:

$$\vec{n} \cdot \vec{j}_T = \vec{n} \cdot (\vec{j}_T + \vec{j}_{1T}) = 0. \quad (3.79)$$

Nach Arnoldus [7] ist die Ladungserhaltung in einem ruhenden Volumen, welches eine Sprungfläche mit Oberflächenstrom \vec{j}_T und einer Oberflächenladung σ einschließt, durch

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} dA + \int_{\partial A_T} \vec{j}_T \cdot \vec{t} ds_T = -\frac{d}{dt} \int_V q \rho dV - \frac{d}{dt} \int_{A_T} \sigma dA_T \quad (3.80)$$

gegeben. Dabei ist \vec{j} die Stromdichte im Raum und $q\rho$ die Raumladungsdichte. Das Wegintegral auf der linken Seite umrandet die Sprungfläche A_T und berechnet die elektrischen Ladungen, die über den Flächenstrom in das Volumen hinein- oder abfließen. Für eine bewegte Fläche müssen die physikalischen

Größen bezüglich des Ruhesystems der Fläche verwendet werden:

$$\int_{\partial A} (\vec{j} - q\rho\vec{v}_T) \cdot \vec{n} dA + \int_{\partial A_T} (\vec{j}_T - \sigma \vec{v}_T) \cdot \vec{t} ds = -\frac{d}{dt} \int_V q\rho dV - \frac{d}{dt} \int_{A_T} \sigma dA_T. \quad (3.81)$$

Die Zeitableitungen der Integrale können mit den Reynolds'schen Transporttheoremen umgeformt werden. In unserem Fall erübrigt sich das, denn die Raumladung, Oberflächenladung und die elektrische Stromdichte im Raum sind 0, bzw. 0. Von der Ladungserhaltung bleibt nur

$$\int_{\partial A_T} \vec{j}_T \cdot \vec{t} ds = 0 = \int_{A_T} \nabla_T \cdot \vec{j}_T dA_T \quad (3.82)$$

übrig. Die Divergenz des Flächenstroms $\nabla_T \cdot \vec{j}_T$ ist in erster Ordnung durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\|\frac{b_\mu}{\mu}\| \\ \|\frac{a_\mu}{\mu}\| \end{pmatrix} = 0 \quad (3.83)$$

gegeben. Der Trennflächenstrom ist divergenzfrei. Die Kraft, die der Trennflächenstrom auf die Trennfläche ausübt, ist durch das Kreuzprodukt mit dem arithmetischen Mittel der angrenzenden magnetischen Induktionen [41] gegeben:

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{j}_T \times \frac{1}{2} (\vec{B}^{(1)} + \vec{B}^{(2)}) \right\} \cdot \vec{n} &= \left\{ (\vec{j}_T + \vec{j}_{1_T}) \times \frac{1}{2} (\vec{B}_1 + \vec{b}_1^{(1)} + \vec{B}_2 + \vec{b}_1^{(2)}) \right\} \cdot \vec{n} \\ &= - \left(\frac{(A_1 k + B_1 l)^2}{\mu_1} + \frac{(A_2 k + B_2 l)^2}{\mu_2} \right) \frac{s_1}{\kappa}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Eine Wellenbewegung der Trennfläche hat einen Flächenstrom zur Folge, der zusammen mit den magnetischen Induktionen als Lorenzkraft entgegengesetzt zur Auslenkung wirkt.

Für ein reales Fluid ist die elektrische Leitfähigkeit endlich. Ein elektrisches Feld ist dann über das Ohmsche Gesetz (1.25) mit einer Stromdichte verbunden. Da jedoch nur die Lösungen des Laplace-Operators für die Stabilität entscheidend und diese rotationsfrei sind, gibt es auch für Fluide mit endlicher Leitfähigkeit keine elektrische Stromdichte in den Teilströmungen. Das sieht man auch an der Induktionsgleichung (1.50), wo der zusätzliche Diffusionsterm nur in Verbindung mit dem Laplace-Operator wirken kann.

Für reale Fluide mit endlicher Leitfähigkeit müssen allerdings die Übergangsbedingungen verschärft werden. Die Tangentialkomponente des Maxwellspannungstensors muss stetig durch die Sprungfläche treten. Es darf also im Grundzustand keinen Oberflächenstrom geben. Dann ist die vorliegende Lösung auch für endliche elektrische Leitfähigkeiten gültig.

Ähnlich verhält es sich mit reibungsbehafteten Fluiden. Die zusätzlichen Terme in der Impulsbilanz (1.54) wirken sich ebenfalls nicht auf die betrachteten Wellenbewegungen aus. Im Grundzustand wäre dann die tangentielle Unstetigkeit der Strömungsgeschwindigkeit wie auch bei Magnetfeldern in Fluiden mit endlicher elektrischer Leitfähigkeit nicht erlaubt. Die Haftbedingung fordert einen stetigen Übergang der Tangentialkomponenten.

3.2 Multiple Skalen Analyse - Evolutionsgleichungen

Die dimensionsbehafteten Feldgleichungen und die aus ihnen gewonnenen Übergangsbedingungen können auf verschiedene Art und Weise entdimensioniert werden. Je nach Art der Entdimensionierung ergeben sich andere dimensionslose Parameter des Systems.

Die linearisierte kinematische Übergangsbedingung ist aus einer Langwellenentwicklung (3.25) gewonnen worden. Der Entwicklungsparameter ist durch das Verhältnis der Größenordnung der Auslenkung H und einer charakteristischen Länge L , die die Änderung in x - oder y -Richtung beschreibt, gegeben. Die Feldgleichungen können mit diesem Entwicklungsparameter entdimensioniert werden. Als Beispiel dienen die x -Komponente der Impulsbilanz und der Induktionsgleichung der oberen Teilströmung:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \dot{u}}{V_\chi} + \left(\frac{U_1}{V_\chi} + \frac{\varepsilon u_1}{V_\chi} \right) \frac{\varepsilon u_{1x}}{V_\chi} + \left(\frac{V_1}{V_\chi} + \frac{\varepsilon v_1}{V_\chi} \right) \frac{\varepsilon u_{1x}}{V_\chi} \\ = -\frac{\rho_\chi}{\rho_1} \frac{\varepsilon p_{1x}}{\rho_\chi V_\chi^2} + M_\chi^2 \frac{B_1}{A_\chi} \frac{\mu_\chi}{\mu_1} \frac{\rho_\chi}{\rho_1} \left(\frac{\varepsilon b_{1z}}{A_\chi} - \frac{\varepsilon c_{1y}}{A_\chi} \right), \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon \dot{a}}{A_\chi} + \left(\frac{U_1}{V_\chi} + \frac{\varepsilon u_1}{V_\chi} \right) \frac{\varepsilon a_x}{A_\chi} + \left(\frac{V_1}{V_\chi} + \frac{\varepsilon v_1}{V_\chi} \right) \frac{\varepsilon a_y}{A_\chi} \\ = \left(\frac{A_1}{A_\chi} + \frac{\varepsilon a_1}{A_\chi} \right) \frac{\varepsilon u_x}{V_\chi} + \left(\frac{B_1}{A_\chi} + \frac{\varepsilon b_1}{A_\chi} \right) \frac{\varepsilon b_{1y}}{A_\chi}. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Mit den charakteristischen Größen A_χ , V_χ , μ_χ und ρ_χ können weitere Parameter eingeführt werden. Neben den dimensionslosen Kennzahlen $\frac{\rho_1}{\rho_\chi}$, $\frac{\rho_2}{\rho_\chi}$, $\frac{U_1}{U_\chi}$ usw. entsteht in der Impulsbilanz ein neuer dimensionsloser Parameter. M_χ ist das Verhältnis der Alfvén- zur Strömungsgeschwindigkeit:

$$M_\chi = \frac{A_\chi}{\sqrt{\mu_\chi \rho_\chi}} \frac{1}{V_\chi}. \quad (3.87)$$

Der Druck ist durch $\rho_\chi V_\chi^2$ normalisiert.

Aus der entdimensionierten dynamischen Übergangsbedingung folgt die dimensionslose Dispersionsrelation:

$$\begin{aligned} \omega'_\pm = \frac{L}{V_\chi} \omega_\pm = \left(\frac{U_1}{V_\chi} k' + \frac{V_1}{V_\chi} l' \right) \frac{\frac{\rho_1}{\rho_\chi}}{\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi}} + \left(\frac{U_2}{V_\chi} k' + \frac{V_2}{V_\chi} l' \right) \frac{\frac{\rho_2}{\rho_\chi}}{\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi}} \\ \pm \left\{ -\frac{\frac{\rho_1}{\rho_\chi} \frac{\rho_2}{\rho_\chi}}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi} \right)^2} \left\{ \left(\frac{U_1}{V_\chi} - \frac{U_2}{V_\chi} \right) k' + \left(\frac{V_1}{V_\chi} - \frac{V_2}{V_\chi} \right) l' \right\}^2 + M_\chi^2 \frac{\left(\frac{A_1}{A_\chi} k' + \frac{B_1}{A_\chi} l' \right)^2}{\frac{\mu_1}{\mu_\chi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi} \right)} \right. \\ \left. + M_\chi^2 \frac{\left(\frac{A_2}{A_\chi} k' + \frac{B_2}{A_\chi} l' \right)^2}{\frac{\mu_2}{\mu_\chi} \left(\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi} \right)} + \frac{T_\sigma}{L V_\chi^2 \rho_\chi} \frac{\kappa'^3}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi} \right)} + \frac{gL}{V_\chi^2} \frac{\left(\frac{\rho_2}{\rho_\chi} - \frac{\rho_1}{\rho_\chi} \right)}{\left(\frac{\rho_1}{\rho_\chi} + \frac{\rho_2}{\rho_\chi} \right)} \kappa' \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Die gestrichenen Wellenzahlen sind durch $k' = Lk, l' = Ll$ und $\kappa' = L\sqrt{k^2 + l^2}$ gegeben. Mit den charakteristischen Größen kann eine dimensionslose Oberflächenspannung $\frac{T_g}{LV_x^2 \rho_x}$ und Schwerkraft $\frac{gL}{V_x^2}$ gebildet werden. Die erste Ordnung in der Reihenentwicklung im Entwicklungsparameter ε entspricht einer Linearisierung des Gleichungssystems der Kelvin-Helmholtz-Instabilität. In der zweiten und dritten Ordnung erhält man Evolutionsgleichungen für die Amplitude, die schwach von den Variablen x, y und t abhängen soll. Dann kann man mit dem Entwicklungsparameter langsame Skalen definieren [63]:

$$X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x, \quad Y_1 = \varepsilon y, \quad Y_2 = \varepsilon^2 y, \quad T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t. \quad (3.89)$$

Die Amplituden der Auslenkungen s_1 und s_2 hängen von diesen langsamen Koordinaten ab:

$$S_1 = S_1(X_1, X_2, Y_1, Y_2, T_1, T_2), \quad (3.90)$$

$$S_2 = S_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2, T_1, T_2). \quad (3.91)$$

Die auftretenden Ableitungen wirken auch auf die Amplituden und werden durch folgende Ausdrücke ersetzt:

$$\partial_x \rightarrow \partial_x + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.92)$$

$$\partial_y \rightarrow \partial_y + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial Y_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (3.93)$$

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (3.94)$$

Da in den Teilströmungen die Geschwindigkeitsfelder und Magnetfelder einer Laplace-Gleichung (3.45) genügen, treten die nichtlinearen Terme für diese Größen ausschließlic in den Übergangsbedingungen an der Trennfläche auf. Die Störungsrechnung wird dadurch erheblich einfacher.

Mit der Multiplen Skalen Analyse [63] wollen wir in dritter Störungsordnung eine Evolutionsgleichung für die Amplitude S_1 herleiten. Dafür müssen alle Terme proportional zur Grundwelle $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ berücksichtigt werden. Deshalb müssen wir in zweiter Störungsordnung auch die Amplitude S_2 der ersten harmonischen Welle $e^{2i(kx+ly-\omega t)}$ bestimmen, da sie in quadratischen Termen der dritten Ordnung Beiträge zur Evolutionsgleichung liefert.

Wir gehen von der kinematischen Übergangsbedingungen aus und bestimmen die Geschwindigkeits- und Magnetfelder, die die Laplacegleichung erfüllen müssen. Aus der dynamischen Übergangsbedingung erhalten wir die Evolutionsgleichungen.

3.3 Störungstheorie zweiter Ordnung

Durch die kinematischen Übergangsbedingungen zweiter Ordnung (A.5) ist das Verhalten der Geschwindigkeitskomponenten w_2 beider Teilströmungen bei $z = 0$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \dot{s}_2 + U s_{2x} + V s_{2y} - w_2 = & - \left(\frac{\partial s_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) \\ & - u_1 s_{1x} - v_1 s_{1y} + w_{1z} s_1. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Die quadratischen Terme $-u_1 s_{1x} - v_1 s_{1y} + w_{1z} s_1$ sind proportional zum Produkt $(S_1 + S_1^*)(S_1 - S_1^*)$ mit der komplex konjugierten Amplitude S_1^* und ergeben nur quadratische Terme in den Amplituden S_1 und S_1^* . Diese Terme sind proportional zur ersten harmonischen Wellenbewegung $e^{2i(kx+ly-\omega t)}$. Sie besitzt die halbe Wellenlänge und doppelte Frequenz der Grundwelle. Im Allgemeinen können aus quadratischen Termen auch Konstanten hervorgehen; dies ist hier jedoch nicht der Fall.

Für die Auslenkung in zweiter Ordnung s_2 wählt man den Ansatz:

$$s_2 = S_2(X_1, X_2, Y_1, Y_2, T_1, T_2) e^{2i(kx+ly-\omega t)} + c.c. \quad (3.96)$$

Eine zusätzliche Abhängigkeit von s_2 zur Grundwelle wäre trivialerweise erfüllt und hätte keinen Einfluss auf die gesuchte Lösung.

Damit liegt das Verhalten von w_2 bei $z = 0$ fest. In den Teilströmungen genügt w_2 einer entwickelten Laplace-Gleichung. Der Laplace-Operator muss mit schwachen Ableitungen bis zur ersten Ordnung in ε ergänzt werden:

$$\Delta \rightarrow \Delta + 2\varepsilon \partial_{xX_1} + 2\varepsilon \partial_{yY_1} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (3.97)$$

Wird die Laplace-Gleichung $\Delta w = 0$ mit der Multiplen Skalen Analyse und dem Ansatz $w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2$ entwickelt, dann lautet der Anteil in zweiter Ordnung für die beiden Teilströmungen:

$$\begin{aligned} \Delta w_2^{(1)} &= -2 \frac{\partial w_{1x}^{(1)}}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial w_{1y}^{(1)}}{\partial Y_1} \\ &= 2 \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) (-\omega + U_1 k + V_1 l) e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + c.c., \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_2^{(2)} &= -2 \frac{\partial w_{1x}^{(2)}}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial w_{1y}^{(2)}}{\partial Y_1} \\ &= 2 \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) (-\omega + U_2 k + V_2 l) e^{i\varphi} e^{\kappa z} + c.c. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Für die Phase der Welle wurde die Abkürzung φ (3.50) verwendet. Die Laplacegleichung fordert eine einfache Wellenabhängigkeit mit abklingendem Teil in z -Richtung. Sie und die kinematische Übergangsbedingungen werden durch den folgenden Ansatz erfüllt:

$$\begin{aligned} w_2^{(1,2)} &= \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right. \\ &\quad \left. \mp z \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \frac{(-\omega + U_{1,2} k + V_{1,2} l)}{\kappa} \right\} e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\ &\quad + 2i (-\omega + U_{1,2} k + V_{1,2} l) (S_2 \pm \kappa S_1^2) e^{2i\varphi} e^{(\mp 2\kappa z)} + c.c. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Die Geschwindigkeitsstörungen sind drehungsfrei. Es liegen Potentialströmungen vor. Aus der senkrechten Geschwindigkeitskomponente kann man das Potential des Geschwindigkeitsfelds ϕ_2 bestimmen:

$$\phi_{2z} = w_2. \quad (3.101)$$

Das Geschwindigkeitspotential lautet:

$$\begin{aligned}\phi_2^{(1,2)} = & \left\{ \mp \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\ & + (\kappa z \pm 1) \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \frac{-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l}{\kappa^3} \Big\} e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\ & + i \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)}{\kappa} (\mp S_2 - \kappa S_1^2) e^{2i\varphi} e^{(\mp 2\kappa z)} + c.c. . \quad (3.102)\end{aligned}$$

Über die Geschwindigkeitspotentiale ϕ_2 und ϕ_1 sind dann auch die anderen Geschwindigkeitskomponenten bekannt. Mit $\phi_{1z} = w_1$ gelten:

$$\begin{aligned}\phi_{2x}^{(1)} + \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial X_1} &= u_2^{(1)}, \\ \phi_{2y}^{(1)} + \frac{\partial \phi_1^{(1)}}{\partial Y_1} &= v_2^{(1)}.\end{aligned} \quad (3.103)$$

Die Induktionsgleichungen (B.12) bis (B.14) können dazu verwendet werden, ein Potential für die magnetische Induktion zu bestimmen. Neben den Komponenten der magnetischen Induktion a_2 und b_2 müssen wir noch den Druck für die dynamische Übergangsbedingung bestimmen. Der Druck p_2 wird über die Impulsbilanzen (B.9) bis (B.11) bestimmt. Es ist bemerkenswert, dass die quadratischen nichtlinearen Terme im Rahmen dieser Störungstheorie nur in der Impulsbilanz in z -Richtung einen Beitrag liefern. Die Impulsbilanzen der anderen Raumrichtungen und sämtliche Induktionsgleichungen sind lineare Gleichungen, wie im Anhang B.1 näher beschrieben. Der Druck p_2 lautet also:

$$\begin{aligned}p_2^{(1,2)} = & i\rho_{1,2} \left[\frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\ & - (\kappa z + 1) \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2}{\kappa^2} \left(\frac{k}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{l}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \Big] e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\ & - 2\rho_{1,2} \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2}{\kappa^2} (\kappa^2 S_1^2 + \kappa S_2) e^{2i\varphi} e^{\mp 2\kappa z} + c.c. \\ & \mp \rho_{1,2} (-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2 e^{\mp 2\kappa z}.\end{aligned} \quad (3.104)$$

Der Druck p_2 besitzt im Gegensatz zu den anderen Feldern einen zusätzlichen abklingenden Term, wie man in der letzten Zeile von (3.104) sieht. Die dynamische Sprungbedingung (2.15) lautet in zweiter Ordnung mit Oberflächenspannung und Schwerkraft (siehe Gleichung (A.11) und folgende):

$$\begin{aligned}& \left\| p_2 + \frac{A}{\mu} a_2 + \frac{B}{\mu} b_2 + \frac{a_1^2}{2\mu} + \frac{b_1^2}{2\mu} - \frac{c_1^2}{2\mu} \right\| + s_1 \left\| p_{1z} + \frac{A}{\mu} a_{1z} + \frac{B}{\mu} b_{1z} \right\| \\ & - (s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \left\| P + \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\| + s_{1x}^2 \left\| P - \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\| + s_{1y}^2 \left\| P + \frac{A^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \right\| \\ & + 2s_{1x}s_{1y} \left\| \frac{AB}{\mu} \right\| - 2s_{1x} \left\| \frac{A}{\mu} c_1 \right\| - 2s_{1y} \left\| \frac{B}{\mu} c_1 \right\| \\ & = T_\sigma (s_{2xx} + s_{2yy}) + 2T_\sigma \left(\frac{\partial s_{1x}}{\partial X_1} + \frac{\partial s_{1y}}{\partial Y_1} \right) + g(\rho_2 - \rho_1) s_2.\end{aligned} \quad (3.105)$$

Wegen der besseren Übersicht setzt man zunächst alle Größen erster Ordnung ein und schreibt alle Größen zweiter Ordnung auf die linke Seite. Nach einer längeren Rechnung erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \|p_2 + \frac{A}{\mu}a_2 + \frac{B}{\mu}b_2\| + T_\sigma (s_{2xx} + s_{2yy}) - g(\rho_2 - \rho_1) s_2 \\ &= |S_1|^2 \|\rho(-\omega + Uk + Vl)^2\| - iT_\sigma \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) e^{i\varphi} \\ &- S_1^2 \left\{ \|\rho_2(-\omega + U_2k + V_2l)^2\| - \|\frac{1}{\mu_2}(A_2k + B_2l)^2\| \right\} e^{2i\varphi} + c.c. . \quad (3.106) \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung gewinnt man zwei Bedingungen, da sie zwei voneinander unabhängige Funktionen $e^{i(kx+ly-\omega t)}$ und $e^{2i(kx+ly-\omega t)}$ enthält und deren Koeffizienten sich bei Gültigkeit der Gleichung zu 0 ergeben müssen. Die ausschließlich exponentiell abfallenden Funktionen des Druckes p_2 aus der letzten Zeile von (3.104) gleichen sich mit den nichtlinearen Termen der dynamischen Übergangsbedingung aus.

Berücksichtigt man bei den Größen p_2^* , a_2^* und b_2^* nur Terme proportional zur Grundwelle $e^{i\varphi}$, dann lautet die erste Bedingung:

$$\|p_2^* + \frac{A}{\mu}a_2^* + \frac{B}{\mu}b_2^*\| = -iT_\sigma \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) e^{i\varphi}. \quad (3.107)$$

Alle Terme dieser Gleichung enthalten schwache Ableitungen. Die Größen a_2^* und b_2^* besitzen keine schwache Ableitung nach der Zeit T_1 , so dass alleine die mechanischen Drücke p_2^* für folgende Vorfaktoren verantwortlich sind:

$$\|p_2^*\| \rightarrow -\frac{i}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \{2\rho_2(-\omega + U_2k + V_2l) + 2\rho_1(-\omega + U_1k + V_1l)\} = \frac{i}{\kappa} \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1}. \quad (3.108)$$

Bis auf ein Vorzeichen und den Faktor $\frac{i}{\kappa}$ ist der Vorfaktor der schwachen Ableitung durch die Ableitung der Dispersionsrelation nach ω gegeben. Ausgehend von (3.107) notiert man den Koeffizienten von $\frac{\partial S_1}{\partial X_1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \left\{ -i\rho_2 k \frac{(-\omega + U_2k + V_2l)^2}{\kappa^3} - i\rho_1 k \frac{(-\omega + U_1k + V_1l)^2}{\kappa^3} \right. \\ & \quad - 2i\rho_2 \frac{(-\omega + U_2k + V_2l)}{\kappa} U_2 - 2i\rho_1 \frac{(-\omega + U_1k + V_1l)}{\kappa} U_1 \\ & \quad + ik \left(kA_2 \frac{A_2k + B_2l}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa} A_2^2 + kA_1 \frac{A_1k + B_1l}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa} A_1^2 \right) \\ & \quad \left. + il \left(kB_2 \frac{A_2k + B_2l}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa} A_2B_2 + kB_1 \frac{A_1k + B_1l}{\kappa^3} + \frac{1}{\kappa} A_1B_1 \right) + 2ikT_\sigma \right\}. \quad (3.109) \end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation F (3.60) kann eingesetzt werden und ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \left\{ i \left(-2\rho_2 \frac{(-\omega + U_2k + V_2l)}{\kappa} U_2 - 2\rho_1 \frac{(-\omega + U_1k + V_1l)}{\kappa} U_1 + 2 \frac{A_1^2}{\mu_1} \frac{k}{\kappa} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 2 \frac{A_2^2}{\mu_2} \frac{k}{\kappa} + 2 \frac{A_1B_1}{\mu_1} \frac{l}{\kappa} + 2 \frac{A_2B_2}{\mu_2} \frac{l}{\kappa} + k3T_\sigma \kappa + \frac{g}{\kappa}(\rho_2 - \rho_1) \right) \right\} = -\frac{i}{\kappa} \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1}. \quad (3.110) \end{aligned}$$

Für den Vorfaktor der schwachen Ableitung nach Y_1 gilt eine entsprechende Rechnung. Für die Änderungen auf der ε^{-1} -Skala muss der folgende Zusammenhang gelten:

$$\frac{i}{\kappa} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial l} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} = 0. \quad (3.111)$$

Das ist ein charakteristisches Ergebnis der Multiplen Skalen Analyse [63] und wird später noch interpretiert (3.140). Mit dieser Gleichung liegt die erste Evolutionsgleichung für die Amplitude S_1 fest. Eine entsprechende Gleichung gilt für S_1^* .

Aus dem zweiten Teil der dynamischen Übergangsbedingung wird S_2 bestimmt. Berücksichtigt man bei den Größen p_2^{**} , a_2^{**} und b_2^{**} nur Terme proportional zur ersten harmonischen Welle $e^{2i\varphi}$, lautet die zweite Bedingung:

$$\begin{aligned} & \left\| p_2^{**} \frac{A}{\mu} a_2^{**} + \frac{B}{\mu} b_2^{**} \right\| + T_\sigma (s_{2xx} + s_{2yy}) - g(\rho_2 - \rho_1) s_2 \\ & = -S_1^2 \left\{ \left\| \rho(-\omega + Uk + Vl)^2 \right\| - \left\| \frac{1}{\mu} (Ak + Bl)^2 \right\| \right\} e^{2i\varphi}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Setzt man nun die Größen zweiter Ordnung ein, erhält man die Bedingung:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\kappa} S_2 \left\{ \rho_2(-\omega + U_2k + V_2l)^2 + \rho_1(-\omega + U_1k + V_1l)^2 - 2\kappa^3 T - \frac{g\kappa}{2}(\rho_2 - \rho_1) \right. \\ & \left. - \frac{(A_1k + B_1l)^2}{\mu_1} - \frac{(A_2k + B_2l)^2}{\mu_2} \right\} = S_1^2 \left\| \rho(-\omega + Uk + Vl)^2 - \frac{(Ak + Bl)^2}{\mu} \right\|. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Der Vorfaktor vor S_2 kann durch Einsetzen der Dispersionsrelation (3.60) vereinfacht werden, so dass der Zusammenhang

$$S_2 = -S_1^2 \frac{\left\| \rho(-\omega + Uk + Vl)^2 - \frac{(Ak + Bl)^2}{\mu} \right\|}{2\kappa^2 T_\sigma - g(\rho_2 - \rho_1)} \quad (3.114)$$

besteht. Der Zähler ist durch die Differenz der Dispersionsrelationen freier Alfvénwellen (3.38) der beiden Teilströmungen gegeben. Die Kreisfrequenz ω genügt aber der Dispersionsrelation der Trennflächenwellen (3.62), so dass im Zähler die Differenz der Abweichungen von den Dispersionsrelation der freien Alfvénwellen steht.

Für $T_\sigma = V = B = 0$ stimmt das Zwischenergebnis (3.114) mit dem von Kant und Malik [33] überein. Oberflächenspannung und Schwerkraft besitzen in der zweiten Störungsordnung ausschließlich Terme proportional zur ersten harmonischen Wellenbewegung. Deshalb finden wir die Größen im Nenner wieder. Bei

$$\kappa_{shr}^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{2T_\sigma} \quad (3.115)$$

tritt die sogenannte Second Harmonic Resonance (SHR) auf. Für diesen Wert von κ genügt die Grundwelle $S_1 e^{i\varphi} + c.c.$ der gleichen Dispersionsrelation wie die der ersten harmonischen $S_2 e^{2i\varphi} + c.c.$, da dann für diesen Wert von κ die dispersiven Terme gleich sind. Beide Wellen bewegen sich mit der gleichen Phasengeschwindigkeit fort. Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass

κ sehr weit von κ_{shr} entfernt ist, da mit unendlich großer Amplitude S_2 die Annahmen der Näherungen verletzt sind.

Die Magnetfelder haben keinen Einfluss auf die Resonanzstelle, da die Magnetfelder einen nicht dispersiven Beitrag zur Wellenausbreitung erzeugen. Oberflächenspannung und Schwerkraft machen die Wellenausbreitung dispersiv.

Der Zusammenhang zwischen den Amplituden S_1 und S_2 stimmt für verschwindende Magnetfelder und nur in x -Richtung betrachtete Strömungsdifferenzen mit dem Ergebnis von Weissman [82] überein:

$$S_2 = -S_1^2 \frac{\|\rho(-\omega + Uk)^2\|}{2\kappa^2 T_\sigma - g(\rho_2 - \rho_1)}. \quad (3.116)$$

In den Teilströmungen befinden sich auch in der zweiten Ordnung keine elektrischen Ladungen oder elektrische Stromdichten. In der Trennfläche fließt jedoch ein Oberflächenstrom (A.66).

3.4 Störungstheorie dritter Ordnung

Die kinematischen Randbedingungen dritter Ordnung (A.6) geben die z -Komponente der Geschwindigkeit bei $z = 0$ in beiden Teilströmungen vor:

$$\begin{aligned} (\partial_t + U\partial_x + V\partial_y) s_3 - w_3 = & -\frac{\partial s_1}{\partial T_2} - U\frac{\partial s_1}{\partial X_2} - V\frac{\partial s_1}{\partial Y_2} \\ & -\frac{\partial s_2}{\partial T_1} - U\frac{\partial s_2}{\partial X_1} - V\frac{\partial s_2}{\partial Y_1} - u_1\frac{\partial S_1}{\partial X_1} - v_1\frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \\ & - u_1 s_{2x} - u_2 s_{1x} - s_1 u_{1x} s_1 - v_1 s_{2y} \\ & - v_2 s_{1y} - s_1 v_{1y} s_1 + s_1 w_{2z} + s_2 w_{1z} + \frac{1}{2} s_1^2 w_{1zz}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist durch bereits berechnete Größen der Störungstheorie erster und zweiter Ordnung gegeben. Mit dem Ansatz für $s_3 = S_3 e^{3i(kx+ly-\omega t)} + c.c.$ ist $w_3(z=0)$ bekannt. w_3 gehorcht in den Teilströmungen für $|z| \neq 0$ einer bis zur dritten Ordnung entwickelten Laplace-Gleichung:

$$\Delta w_3 = -2\frac{\partial w_{2x}}{\partial X_1} - 2\frac{\partial w_{2y}}{\partial Y_1} - 2\frac{\partial w_{1x}}{\partial X_2} - 2\frac{\partial w_{1y}}{\partial Y_2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial Y_1^2}. \quad (3.117)$$

Für die Berechnung der Evolutionsgleichung benötigt man nur Terme proportional zur Grundwelle. Setzt man diese in der rechten Seite ein und führt die Ableitungen nach den schnellen Variablen aus, erhält man aus (3.117):

$$\begin{aligned} \Delta w_3 = & -2i \left(k\frac{\partial}{\partial X_1} + l\frac{\partial}{\partial Y_1} \right) \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U\frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V\frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right. \\ & \left. \mp z \left(k\frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l\frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \frac{(-\omega + Uk + Vl)}{\kappa} \right\} e^{i\varphi} e^{\mp\kappa z} \\ & - \left(2ik\frac{\partial}{\partial X_2} + 2il\frac{\partial}{\partial Y_2} + \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y_1^2} \right) i(-\omega + Uk + Vk) S_1 e^{i\varphi} e^{\mp\kappa z} \\ & + c.c. . \end{aligned} \quad (3.118)$$

Die ersten beiden Zeilen auf der rechten Seite stammen aus dem Feld w_2 . Die dritte Zeile besteht aus Beiträgen des Feldes w_1 . Für $w_3^{(1)}$ der oberen Teilströmung gilt dann:

$$\begin{aligned}
w_3^{(1)} = & \left\{ i\kappa(-\omega + U_1k + V_1l) \left(\frac{1}{2}\kappa|S_1|^2S_1 + 3S_1^*S_2 \right) + i\frac{z}{\kappa} \left(\frac{k\partial^2S_1}{\partial X_1\partial T_1} + \frac{l\partial^2S_1}{\partial Y_1\partial T_1} \right) \right. \\
& + \frac{iz}{\kappa}U_1 \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{iz}{\kappa}V_1 \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \\
& + \frac{iz}{2\kappa^3}(-\omega + U_1k + V_1l) \left(\frac{l\partial}{\partial X_1} - \frac{k\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \\
& - \frac{iz^2}{2\kappa^2}(-\omega + U_1k + V_1l) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 + \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U_1 \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + V_1 \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \\
& \left. - \frac{z}{\kappa}(-\omega + U_1k + V_1l) \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \right\} e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c. \quad (3.119)
\end{aligned}$$

$w_3^{(2)}$ gewinnt man aus $w_3^{(1)}$, indem man die Strömungsgeschwindigkeiten U_2 und V_2 ein- und κ mit $-\kappa$ ersetzt. Da die Strömung eine Potentialströmung ist, kann man über

$$\phi_{3z} = w_3 \quad (3.120)$$

das Geschwindigkeitspotential ϕ_3 und über

$$\begin{aligned}
\phi_{3x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial X_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial X_2} &= u_3, \\
\phi_{3y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial Y_2} &= v_3
\end{aligned} \quad (3.121)$$

die übrigen Geschwindigkeitskomponenten bestimmen. Die Komponenten der magnetischen Induktion bestimmt man über die Induktionsgleichungen (B.18). Über die Impulsbilanzen dritter Ordnung ist man in der Lage den Druck p_3 zu bestimmen (B.15) bis (B.17). Die dynamische Übergangsbedingung in dritter Ordnung Störungstheorie besteht aus den Beiträgen des Spannungstensors (A.17), (A.19), (A.21), der Oberflächenspannung (A.31) und der Schwerkraft (A.36). In der folgenden Gleichungen sind alle linearen Terme der Übergangsbedingung auf der linken Seite versammelt. Auf der rechten Seite sind die nichtlinearen Terme der Beiträge aus dem Druck, der Oberflächenspannung (A.31) und der Schwerkraft (A.36) gegeben:

$$\begin{aligned}
& ||p_3 + \frac{A}{\mu}a_3 + \frac{B}{\mu}b_3|| + T_\sigma(s_{3xx} + s_{3yy}) + g(\rho_2 - \rho_1)s_3 = \\
& -s_1||p_{2z} + \frac{Aa_{2z}}{\mu} + \frac{Bb_{2z}}{\mu}|| - s_2||p_{1z} + \frac{Aa_{1z}}{\mu} + \frac{Bb_{1z}}{\mu}|| - \frac{1}{2}s_1^2||p_{1zz} + \frac{Aa_{1zz}}{\mu} + \frac{Bb_{1zz}}{\mu}|| \\
& - ||\frac{1}{\mu}(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)|| - s_1||\frac{1}{\mu}(a_1a_{1z} + b_1b_{1z} + c_1c_{1z})|| \\
& + 2T_\sigma \left(\frac{\partial s_{2x}}{\partial X_1} + \frac{\partial s_{2y}}{\partial Y_1} + \frac{\partial s_{1x}}{\partial X_2} + \frac{\partial s_{1y}}{\partial Y_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial X_1^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s_1}{\partial Y_1^2} \right) \\
& + T_\sigma \left(s_{1xx}s_{1y}^2 - 2s_{1x}s_{1y}s_{1xy} + s_{1yy}s_{1x}^2 - \frac{3}{2}(s_{1xx} + s_{1yy})(s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \right). \quad (3.122)
\end{aligned}$$

Weissman [82] verwendete eine inkorrekte Form der Krümmung, die von der Definition in [13] abweicht. Auf die Störungsrechnung hat diese aber keinen Einfluss, da beide Definitionen bis zur dritten Ordnung die gleichen Beiträge liefern.

Aus der dynamischen Übergangsbedingung (3.122) folgt aus den Koeffizienten proportional zur Grundwelle $e^{i\varphi}$:

$$i \left(-F_\omega \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + F_k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + F_l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) + \frac{1}{2} F_{\omega\omega} \frac{\partial^2 S_1}{\partial T_1^2} - F_{\omega k} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial T_1} + \frac{1}{2} F_{kk} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial X_1^2} + F_{kl} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{1}{2} F_{ll} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} - F_{\omega l} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial T_1 \partial Y_1} = \lambda |S_1|^2 S_1. \quad (3.123)$$

Dabei bezeichnen die untenstehenden Indizes von F die jeweilige Ableitung. Es gilt also $F_l = \frac{\partial F}{\partial l}$. Diese Gleichung bildet zusammen mit (3.111)

$$-F_\omega \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + F_k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + F_l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} = 0 \quad (3.124)$$

die allgemeine Form der Evolutionsgleichungen der Amplitude für die Zeitskalen ϵ^{-1} und ϵ^{-2} und entsprechen formal den Ergebnissen von Weissman. Die Dispersionsrelation F (3.62) und der Koeffizient der kubischen Nichtlinearität λ enthalten zusätzlich die Alfvénwellengeschwindigkeiten und die Strömungsgeschwindigkeiten des Grundzustands der dritten Raumrichtung:

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2} \kappa^2 \left\{ -4g(\rho_2 - \rho_1)\kappa - T_\sigma \kappa^3 + 4 \frac{||\rho(-\omega_\pm + Uk + Vl)^2 - \frac{(Ak+Bl)^2}{\mu}||^2}{2T_\sigma \kappa^3 - g(\rho_2 - \rho_1)\kappa} \right\}. \quad (3.125)$$

Für $T_\sigma = l = 0$ ergibt sich nicht der Wert von [33], da in der betreffenden Arbeit die zusätzlichen nichtlinearen Terme des Druckes nicht berücksichtigt worden sind. Obwohl sich in [51] einige Druckfehler eingeschlichen haben, lassen sich die Ergebnisse für einen in zwei Raumdimensionen auf der Neutralkurve ausgewerteten Landaukoeffizienten reproduzieren. In [73] und [36] ist der Landaukoeffizient fehlerhaft, da sich für verschwindende Magnetfelder nicht die Gleichungen Weissmans [82] ergeben. In [38] aus dem Jahre 2006 wird die nichtlineare Kelvin-Helmholtz-Instabilität für zwei Raumdimensionen kurz präsentiert, wobei die Dispersionsrelation vermutlich falsch ist, da für gleiche Permeabilitäten die Wirkung des Magnetfelds im Linearen verschwindet.

Meines Wissens liegt nun mit den Gleichungen (3.123) und (3.124) mit der Dispersionsrelation (3.60) und dem Landaukoeffizienten (3.125) erstmals ein Gleichungssystem vor, mit dem man die Evolutionen der Amplitude in drei Raumdimensionen für den allgemeinsten Grundzustand analysieren kann.

Der Landau-Koeffizient λ besteht aus zwei Summanden. Der erste Summand $-4g(\rho_2 - \rho_1)\kappa - T_\sigma \kappa^3$ stammt aus kubischen Termen der kinematischen und dynamischen Übergangsbedingungen dritter Ordnung und beschreibt die Selbstwechselwirkung der Grundwelle. Er lässt durch die dispersiven Anteile der linearen Dispersionsrelation (3.62) darstellen.

Der zweite Summand wird durch quadratische Terme der Übergangsbedingungen erzeugt und beschreibt die Wechselwirkung der Grundwelle mit der ersten Harmonischen. Er weist deshalb auch die Zweite Harmonische Resonanz auf. Die

gewonnenen Gleichungen gelten nur für $\kappa \neq \kappa_{shr}$. Im Zähler steht das Quadrat einer Größe, die aus der Bestimmungsgleichung für S_2 bekannt ist; es ist die Differenz der Dispersionsrelationen für freie Alfvénwellen der beiden Teilströmungen. Sie enthält keine dispersiven Anteile wie Schwerkraft oder Oberflächenspannung.

Die enthaltenen physikalischen Variablen wie Massendichten oder Geschwindigkeiten sind reell. Für den gewählten Wellenansatz gilt das auch für die Wellenzahlen k und l . Für die später betrachteten Strömungszustände ist ω ebenfalls stets reell. Das macht den Landaukoeffizienten λ zu einer rein reellen Größe.

Das Vorzeichen von λ hat Einfluss darauf, ob die nichtlinearen Effekte stabilisierend oder destabilisierend auf die Strömung wirken. Der erste Summand ist für $\rho_2 > \rho_1$ immer negativ:

$$-T_\sigma \kappa^2 - 4g(\rho_2 - \rho_1) < 0, \quad \forall \kappa, \text{ wenn } \rho_2 > \rho_1. \quad (3.126)$$

Der zweite Summand kann das Vorzeichen wechseln. Dabei ist entscheidend, ob der Betrag des Wellenvektors κ größer oder kleiner als der Wert der Zweiten Harmonischen Resonanz κ_{shr} ist. Für

$$2T_\sigma \kappa^2 - g(\rho_2 - \rho_1) > 0 \quad (3.127)$$

besitzt die erste Harmonische der Grundwelle eine größere Phasengeschwindigkeit als die Grundwelle und der zweite Summand ist positiv und konkurriert mit dem ersten um das Vorzeichen des Landaukoeffizienten.

Ein Spezialfall ergibt sich, wenn der magnetische Druck auf eine Welle von beiden Teilströmungen gleich groß ist:

$$\frac{(A_1 k + B_1 l)^2}{\mu_1} = \frac{(A_2 k + B_2 l)^2}{\mu_2}. \quad (3.128)$$

Das ist zum Beispiel der Fall, wenn die magnetischen Induktionen des Grundzustandes und die Permeabilitäten stetig durch die Trennfläche gehen. Dann verschwindet der nichtlineare Beitrag durch das Magnetfeld. Die Magnetfelder beeinflussen dann nur über die Kreisfrequenz ω (3.66) den Landaukoeffizienten:

$$\lambda = \frac{1}{2} \kappa^2 \left\{ -4g(\rho_2 - \rho_1) \kappa - T_\sigma \kappa^3 + 4 \frac{|\rho(-\omega + Uk + Vl)|^2}{2T_\sigma \kappa^3 - g(\rho_2 - \rho_1) \kappa} \right\}. \quad (3.129)$$

Für kleine κ bestimmt die Schwerkraft, für sehr große κ die Oberflächenspannung das Verhalten von λ , da für hinreichend kleine oder große κ für ω_\pm die Entwicklungen

$$\omega_\pm \approx \pm \sqrt{g \frac{(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}} \sqrt{\kappa} + |\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \kappa + |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \kappa + \dots, \quad (3.130)$$

$$\omega_\pm \approx \pm \sqrt{\frac{T_\sigma}{\rho_1 + \rho_2}} \sqrt{\kappa}^3 + |\vec{V}_1| \cos(\alpha_1) \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \kappa + |\vec{V}_2| \cos(\alpha_2) \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \kappa + \dots \quad (3.131)$$

gelten, so dass das Polynom mit der kleinsten Potenz mit der Schwerkraft, das der größten Potenz mit der Oberflächenspannung gewichtet ist. Setzt man die

Magnetfelder 0 und berücksichtigt nur die Strömungsgeschwindigkeit U_1 in x -Richtung, erhält man bei einer Entdimensionierung, wie sie in Kapitel 3.2 gezeigt worden ist, mit den normierten Größen $\rho_\chi = \rho_1 + \rho_2$, $\tilde{g} = \frac{gL}{V_\chi^2} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}$ und $\tilde{T}_\sigma = \frac{T_\sigma}{(\rho_1 + \rho_2) V_\chi^2 L}$ das Ergebnis von Weissman:

$$\lambda_W = \frac{1}{2} \kappa^2 \left\{ -4\tilde{g}\kappa - \tilde{T}_\sigma \kappa^3 + 4 \frac{\left\{ \rho'_2 \omega'^2 - \rho'_1 (-\omega' + Uk)^2 \right\}^2}{2\tilde{T}_\sigma \kappa^3 - \tilde{g}\kappa} \right\}. \quad (3.132)$$

Für die weitere Analyse beschränkt man sich zweckmäßigerweise auf zwei Raumdimensionen und verwendet eine entdimensionierte Form des Landau-Koeffizienten. Mit $V_1 = V_2 = 0$, $B_1 = B_2 = 0$ und $l = 0$ wird die x -Richtung ausgewählt. Mit $l = 0$ gilt $\kappa = |k|$. Wählt man die physikalischen Größen der unteren Teilströmung als Skalierungsgrößen $\mu_\chi = \mu_2$, $\rho_\chi = \rho_2$, $U_\chi = U_2$ und $A_\chi = A_2$ erhält man eine dimensionslose Form, deren Parameter dimensionslose Verhältnisse der physikalischen Größen beider Teilströmungen bilden:

$$\lambda_{2d} = \frac{1}{2} |k|^2 \left[-4\hat{g}(1 - \rho) |k| - \hat{T}_\sigma |k|^3 + \frac{4}{2\hat{T}_\sigma |k|^3 - \hat{g}(1 - \rho) |k|} \cdot \left\{ (-\omega + k)^2 - \rho(-\omega + Uk)^2 + M_2^2 \left(\frac{A^2}{\mu} - 1 \right) k^2 \right\}^2 \right], \quad (3.133)$$

wobei die Kreisfrequenzen durch

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_\pm &= \frac{U\rho + 1}{1 + \rho} k \\ &\pm \sqrt{-\frac{\rho}{(1 + \rho)^2} (1 - U)^2 k^2 + M_2^2 \left(\frac{A^2}{\mu} + 1 \right) k^2 + \hat{T}_\sigma |k|^3 \frac{1}{1 + \rho} + \hat{g} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} |k|} \end{aligned} \quad (3.134)$$

gegeben sind. Die Wellenzahlen liegen in dimensionsloser Form vor: $kL \rightarrow k$. Für spätere Rechnungen benötigt man auch die implizite Form der Dispersionsrelation:

$$\begin{aligned} \hat{F} &= \\ &\left\{ (-\omega + k)^2 + \rho(-\omega + Uk)^2 - M_2^2 \left(\frac{A^2}{\mu} + 1 \right) k^2 - \hat{T}_\sigma |k|^3 - \hat{g} |k| (1 - \rho) \right\}. \end{aligned} \quad (3.135)$$

Die Parameter sind:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}, U = \frac{U_1}{U_2}, A = \frac{A_1}{A_2}, \hat{T}_\sigma = \frac{T_\sigma}{\rho_2 U_2^2 L}, \hat{g} = \frac{gL}{U_2^2}, M_2 = \frac{A_2}{\sqrt{\mu_2 \rho_2}} \frac{1}{U_2}. \quad (3.136)$$

Bei einem Dichteverhältnis von $\rho = 1$ verliert die Schwerkraft ihre Wirkung. Bei Gleichheit der magnetischen Induktionen und Permeabilitäten entfällt der magnetische Term im zweiten Summanden von λ_{2d} . Bei Gleichheit der Strömungsgeschwindigkeiten

$U = 1$ liegt die Rayleigh-Taylor-Instabilität vor.

Der Landaukoeffizient λ_{2d} ist ein Polynom der Größe \sqrt{k} . Der Summand mit der kleinsten Potenz lautet:

$$\frac{1}{2}|k|^2 \left\{ -4\hat{g}|k|(1-\rho) - 4\hat{g}\frac{(1-\rho)^3}{(1+\rho)^2}|k| \right\}. \quad (3.137)$$

Er ist für ein Dichteverhältnis $\rho < 1$ stets kleiner 0. Für den Langwellenlimes $\lim_{k \rightarrow 0}$ geht λ_{2d} gegen 0.

Der Summand mit der höchstens Potenz in \sqrt{k} ist:

$$\frac{1}{2}|k|^2 \left\{ -\hat{T}_\sigma|k|^3 + 2\hat{T}_\sigma\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2}|k|^3 \right\} = \frac{\hat{T}_\sigma}{2(1+\rho)^2}|k|^5 (1-6\rho+\rho^2). \quad (3.138)$$

In der höchsten Potenz entscheidet das Dichteverhältnis ρ über das Vorzeichen. Für

$$\rho > 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,172 \quad (3.139)$$

wird λ_{2d} für hinreichend große k negativ. Damit ist das Verhalten von $\lambda_{2d}(k)$ für kleine und große k bekannt.

An der Stelle $k = k_{shr}$ liegt eine Polstelle, die einen Vorzeichenwechsel markiert. Wenn also $\rho > 0,172$ ist, muss es noch mindestens eine weitere Nullstelle von λ_{2d} geben. Für große k verlieren die Gleichungen ihre Gültigkeit, da sie auf einer Langwellenapproximation basieren. Die Landaukoeffizienten für die beiden möglichen Lösungen ω_+ und ω_- sind verschieden.

In den folgenden Abbildungen ist der Landau-Koeffizient λ_{2d} über der positiven Wellenzahl k für die beiden möglichen Lösungen ω_{\pm} aufgetragen. Beiden Kurven gemeinsam ist das Verhalten im Lang- und Kurzwellenlimes für $k < k_{shr}$ bzw. hinreichend große k . Von $k = 0$ bis k_{shr} sind beide Landaukoeffizienten negativ. Dieses Verhalten gilt auch für Wellen, die sich beliebig in der Ebene ausbreiten. Für hinreichend große k ist die Wirkung der Oberflächenspannung entscheidend. Für das gewählte Dichteverhältnis werden die Landaukoeffizienten ebenfalls negativ.

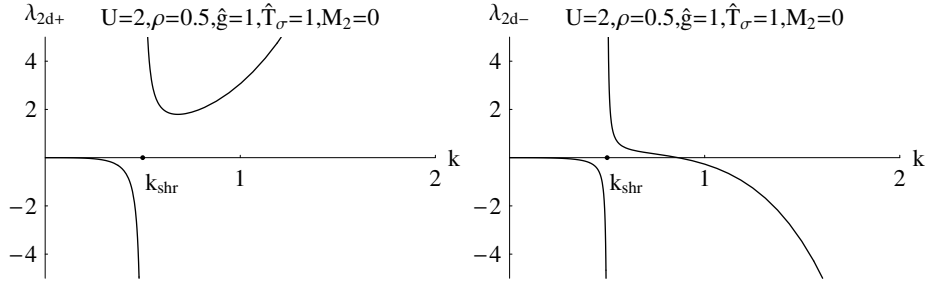


Abbildung 3.13: Die Landaukoeffizienten λ_{2d+} und λ_{2d-} für die Lösungen ω_{\pm} über der Wellenzahl k ohne angelegtes Magnetfeld.

Die Polstelle liegt bei beiden Lösungen bei k_{shr} . Bei bestimmter Parameterwahl sind beide Landaukoeffizienten gleich $\lambda_{2d+} = \lambda_{2d-}$. Das gilt zum Beispiel für $U = 1$, dann liegt die Rayleigh-Taylor-Instabilität vor:

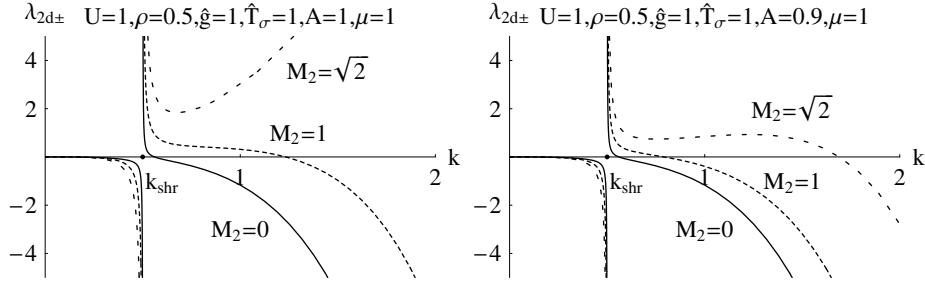


Abbildung 3.14: Die Landaukoeffizienten $\lambda_{2d\pm}$ für die Rayleigh-Taylor-Instabilität $U = 1$ für verschiedene $M_2 = 0$ (durchgezogen), $M_2 = 1$ (gestrichelt) und $M_2 = \sqrt{2}$ (noch gestrichelter). Links ist $A = 1$, rechts $A = 0,9$.

In Abbildung (3.14) sieht man den Einfluss eines Magnetfeldes auf den Landaukoeffizienten. Für $k < k_{shr}$ ist der Einfluss eher schwach. Der Betrag von $\lambda_{2d\pm}$ wird größer. Für $k > k_{shr}$ ist der Einfluss des Magnetfeldes größer. Der Vorzeichenwechsel von $\lambda_{2d\pm}$ findet für stärkere Magnetfelder bei größeren Wellenzahlen k statt. Weist die magnetische Induktion oder die Permeabilität einen Sprung auf, macht sich das ebenfalls bemerkbar. Im gezeigten Beispiel ist rechts die magnetische Energie der beiden Teilströmungen kleiner als links. Die Nullstellen der verschiedenen Kurven liegen näher an der Polstelle.

Die beiden Landaukoeffizienten fallen ebenfalls zusammen, wenn die Dichte und das Magnetfeld beider Teilströmungen gleich sind ($\rho = A = \mu = 1$). In diesem Fall entfällt die Wirkung der Schwerkraft und damit auch die Polstelle:

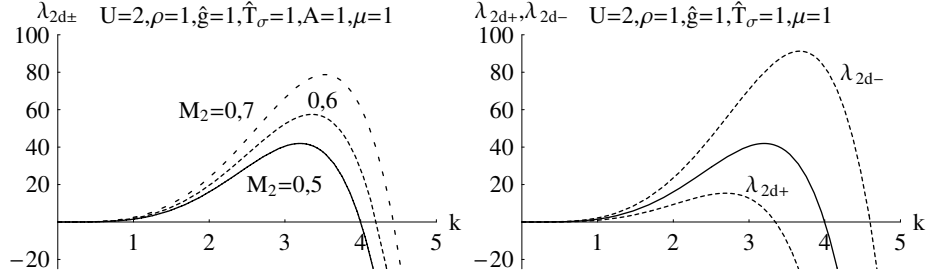


Abbildung 3.15: $\lambda_{2d\pm}$ für Teilströmungen gleicher Dichte $\rho = 1$. Ohne Wirkung der Schwerkraft gibt es keine Polstelle. Die Symmetrie wird durch einen Sprung der magnetischen Induktion zerstört. Rechts sind λ_{2d+} und λ_{2d-} für $A = \sqrt{\frac{7}{18}}$ und $M_2 = 0,6$ über k aufgetragen.

Auf der linken Seite der Abbildung (3.15) sieht man, dass ein stärkeres Magnetfeld den positiven Bereich vergrößert. Auf der rechten Seite ist das Magnetfeld ungleichmäßig auf beide Teilströmungen verteilt. Es besitzt aber im Linearen die gleiche Wirkung wie ein in beiden Teilströmungen gleichstarkes Magnetfeld mit $M_2 = 0,5$ (durchgezogene Linie). Die Symmetrie ist aufgebrochen und der Landaukoeffizient ist für die beiden Lösungen ω_{\pm} verschieden. Für die ω_{+} -Lösung wird der positive Bereich verkleinert, für die ω_{-} -Lösung vergrößert. Der Nulldurchgang wandert für kleinere Beträge der Oberflächenspannung nach rechts. Ohne Oberflächenspannung bleibt der Landaukoeffizient (3.133) für alle k negativ. In der nächsten Abbildung ist λ_{2d} für Strömungen ohne Oberflächenspannung gezeigt. Die übrigen Parameter U und ρ weichen nur wenig von 1 ab, damit λ_{2d} nicht zu schnell abfällt.

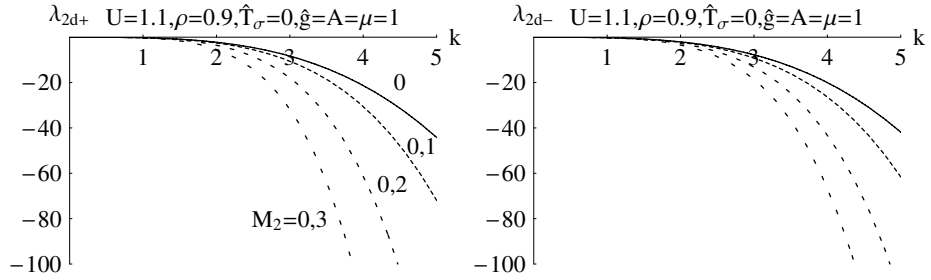


Abbildung 3.16: λ_{2d+} und λ_{2d-} sind ohne Oberflächenspannung für alle k negativ. Magnetfelder mit $M_2 = 0, 1; 0, 2; 0, 3$ verstärken diesen Effekt.

3.5 Nichtlineare Stabilitätsanalyse

Die beiden Evolutionsgleichungen (3.111) und (3.123) beschreiben das Verhalten der Amplitude auf den Zeitskalen ε^{-1} und ε^{-2} .

Weissman [82] hat in seiner Arbeit diese Evolutionsgleichungen für linear stabile und marginal stabile Wellen in einem System ohne Magnetfelder untersucht. Aus den beiden Evolutionsgleichungen lassen sich bekannte nichtlineare Gleichungen

herleiten. Im folgenden Abschnitt soll die Wirkung des Magnetfelds auf die nichtlineare Stabilität der Strömungen untersucht werden.

3.5.1 Linear stabile Wellen

Unterhalb der neutralen Kurve (3.8) ist die Strömung linear stabil. Die Wellen breiten sich anisotrop und dispersiv aus. Die erste Amplitudengleichung (3.111) kann umgeschrieben werden in

$$\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} = 0. \quad (3.140)$$

Diese Gleichung besagt, dass sich Störungen auf der Zeitskala ϵ^{-1} mit den Gruppengeschwindigkeitskomponenten $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial l}$ in die jeweiligen Richtungen ausbreiten. Diese Gleichung kann verwendet werden um eine Koordinate der ϵ^{-1} -Skala zu eliminieren und die allgemeine Evolutionsgleichung (3.123) der Zeitskala ϵ^{-2} umzuformen in:

$$i \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k \partial l} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} \right] = -\frac{\lambda}{F_\omega} |S_1|^2 S_1. \quad (3.141)$$

Es ist zweckmäßig in das Bezugssystem zu transformieren, welches sich mit Gruppengeschwindigkeit auf der Zeitskala ϵ^{-2} bewegt. Es gilt

$$T'_2 = T_2 - \frac{1}{\frac{\partial \omega}{\partial k}} X_2 - \frac{1}{\frac{\partial \omega}{\partial l}} Y_2:$$

$$i \frac{\partial S_1}{\partial T'_2} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k \partial l} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} \right] = -\frac{\lambda}{F_\omega} |S_1|^2 S_1. \quad (3.142)$$

Das ist die nichtlineare Schrödingergleichung in zwei Raumdimensionen.

Für linear stabile Wellen ist ω reell und damit auch alle auftretenden Koeffizienten.

Die nichtlineare Schrödingergleichung besitzt viele Lösungen. Die Inverse Scattering Methode ist nur anwendbar, wenn eine Ausbreitungsrichtung vorliegt [18]. Gleichung (3.142) kann auch für eine beliebige Ausbreitungsrichtung in der $X_1 Y_1$ -Ebene mit $X'_1 = \cos(\varphi) X_1 + \sin(\varphi) Y_1$ gelöst werden. Man erhält die Gleichung

$$i \frac{\partial S_1}{\partial T'_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \cos^2(\varphi) + 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k \partial l} \sin(\varphi) \cos(\varphi) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \sin^2(\varphi) \right) \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1'^2} = -\frac{\lambda}{F_\omega} |S_1|^2 S_1. \quad (3.143)$$

Je nach Vorzeichen der Koeffizienten liegt die fokussierende oder defokussierende Schrödingergleichung vor. Für die Gleichung (3.143) kann die Unterscheidung richtungsabhängig werden. Anders als im Fall für Wasserwellen [18], für die ein Winkel φ angegeben werden kann, der die beiden Arten der Schrödingergleichungen voneinander trennt, ist hier der Fall sehr komplex. Die Modulation breitet sich ebenfalls anisotrop aus.

Das wird an den folgenden Beispielen deutlich. Für zwei in x -Richtung fließende Parallelströmungen werden für senkrecht oder parallel in der Ebene angelegte Magnetfelder Soliton- und Wellenzuglösungen betrachtet:

Solitonlösungen

Es wird angenommen, dass sich eine Störung auf der ε^{-2} -Skala wie die Grundwelle nur in x -Richtung ausbreitet. Die Magnetfelder zeigen ebenfalls nur in x -Richtung. Gleichung (3.143) vereinfacht sich mit diesen Annahmen auf

$$i \frac{\partial S_1}{\partial T'_2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1^2} = - \frac{\lambda_{2d}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}} |S_1|^2 S_1, \quad (3.144)$$

mit den Koeffizienten λ_{2d} (3.133), ω (3.134) und F (3.135). Die Ableitungen der Größen sind ebenfalls mit dem Index $2d$ versehen, da sie für dieses Problem mit effektiv nur zwei Raumdimensionen ausgewertet werden müssen. Für eine stabile Solitonlösung der Form

$$S_1(X_1, T'_2) = a \sqrt{\frac{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}}{\lambda_{2d}}} \operatorname{sech} \left[a \left\{ X_1 - b \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} T'_2 \right\} \right] \cdot e^{i b X_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} (a^2 - b^2) T'_2}, \quad (3.145)$$

wobei a eine reellwertige Amplitude und b eine kleine Störung der Wellenzahl k darstellt, muss das Produkt der Koeffizienten

$$- \frac{\lambda_{2d}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} < 0 \quad (3.146)$$

sein. Der Landaukoeffizient λ_{2d} ist aus Gleichung (3.125) bekannt. Das Produkt

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} \quad (3.147)$$

ist für beide Lösungen ω_{\pm} identisch. Denn sowohl die Ableitung der impliziten Dispersionsrelation

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d} = -2\omega_{2d}(1 + \rho) - 2(1 + U\rho)k \propto \pm \sqrt{f(k)} \quad (3.148)$$

als auch die zweite Ableitung der expliziten Form $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d}$ werden aus dem Wurzelterm gewonnen, dessen Vorzeichen sich im Produkt gegenseitig aufhebt. Die zweite Ableitung der Dispersionsrelation $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d}$ macht im Gegensatz zu $\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}$ einen Vorzeichenwechsel. Das Polynom $f(k)$ unter der Wurzel von (3.134)

$$f(k) = - \frac{\rho}{(1 + \rho)^2} (1 - U)^2 k^2 + M_2^2 \left(\frac{A^2}{\mu} + 1 \right) k^2 + \hat{T}_\sigma |k|^3 \frac{1}{1 + \rho} + \hat{g} \frac{1 - \rho}{1 + \rho} |k| \quad (3.149)$$

ist von dritter Ordnung in k . Für hinreichend kleine k verläuft $\omega(k)$ wie \sqrt{k} und für hinreichend große k wie $k\sqrt{k}$. Bei

$$2f''(k)f(k) - f(k)^2 = 0 \quad (3.150)$$

besitzt $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d}$ eine Nullstelle. Bei einer ebenen Welle, die sich in x -Richtung ausbreitet, ergibt sich für das gewählte Problem und positive k aus Gleichung

(3.150):

$$-\hat{g}^2(\rho-1)^2 + 6g(1-\rho)k^2\hat{T}_\sigma + 4k^3\hat{T}_\sigma(-\rho\frac{(U-1)^2}{1+\rho} + M_2^2\left(\frac{A^2}{\mu} + 1\right)) + 3k^4\hat{T}_\sigma^2 = 0. \quad (3.151)$$

Es liegt ein Polynom vierten Grades in k vor. Um den Wert von k abzuschätzen, kann man die Magnetfelder so wählen, dass sie den Geschwindigkeitsterm im Koeffizienten der dritten Potenz von k kompensieren. Dann liegt eine quadratische Gleichung in k^2 vor. Die Lösung lässt sich leicht angeben, da die Gleichung dann durch die pq -Formel gelöst werden kann:

$$k = 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}}\sqrt{\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{2T_\sigma}} \approx 0,556 \cdot k_{shr}. \quad (3.152)$$

Kompensieren sich Geschwindigkeiten und Magnetfelder findet ein Vorzeichenwechsel vor der Polstelle k_{shr} statt. λ_{2d} ist für $k < k_{shr}$ stets negativ, so dass das Verhalten von $\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{2d}$ die Stabilitätsgrenze für die Solitonen (3.145) vor der Polstelle bestimmt.

Bei stärkeren Magnetfeldern tritt der Vorzeichenwechsel bereits für kleinere k ein, da der Koeffizient der dritten Potenz in (3.151) dann positiv ist. Bei schwächeren Magnetfeldern liegt er bei größeren k . In der folgenden Abbildung ist das Produkt für eine Beispielströmung mit $U = 2, \rho = \frac{1}{2}, A = 1, \mu = 1, \hat{T}_\sigma = 1$ und $\hat{g} = 1$ über der Wellenzahl k aufgetragen:

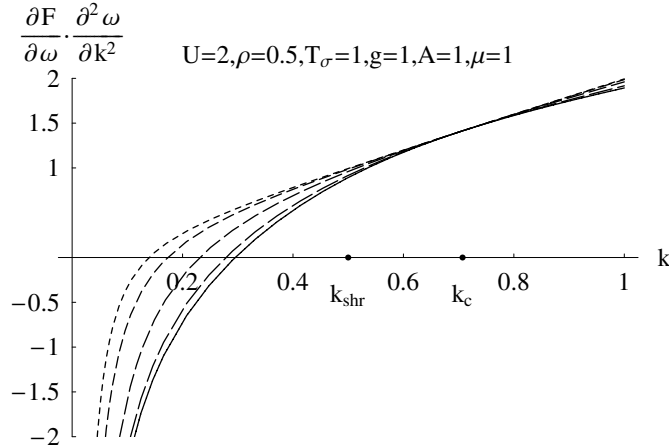


Abbildung 3.17: Die Funktion $\frac{\partial F}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ macht einen Vorzeichenwechsel an der Nullstelle der Funktion (3.151). In der Abbildung sind Kurven für verschiedene Parameter M_2 gezeichnet. Die durchgängig gezeichnete Linie kennzeichnet eine Strömung ohne Magnetfeld $M_2 = 0$. Die nächstliegende Kurve gilt für $M_2 \approx 0,41$. In diesem Fall kompensiert das Magnetfeld die Geschwindigkeitsdifferenz. Bei stärkeren Magnetfeldern $M_2 = 1; 2; 3$ wird die Nullstelle zum Ursprung hin verschoben.

Die Nullstelle wandert für größere Geschwindigkeitsdifferenzen nach rechts. Für linear stabile bzw. marginal stabile Wellen ist die kritische Geschwindigkeitsdifferenz durch (3.73) gegeben, bei der die linearen Wellen als erstes instabil werden. Der Vorzeichenwechsel würde bei dann bei k_c eintreten, weil F_ω an dieser Stelle, die auf der Neutralitätskurve liegt, verschwindet. Auf und in der Umgebung der Neutralitätskurve gilt Gleichung (3.145) nicht. Gleiches gilt für die Nullstellen der Funktion $\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$, die die Grenze zwischen stabilen und instabilen Solitonen bildet. Für $k < k_{shr}$ ist $\lambda_{2d\pm}$ stets negativ. Für das Intervall $0 < k < k_{shr}$ wird die Stabilitätsgrenze durch $\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ festgelegt. Für den Bereich $k > k_c$ ist λ_{2d} verantwortlich, da $\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ auf jeden Fall positiv ist, wie man in Abbildung (3.18) sieht.

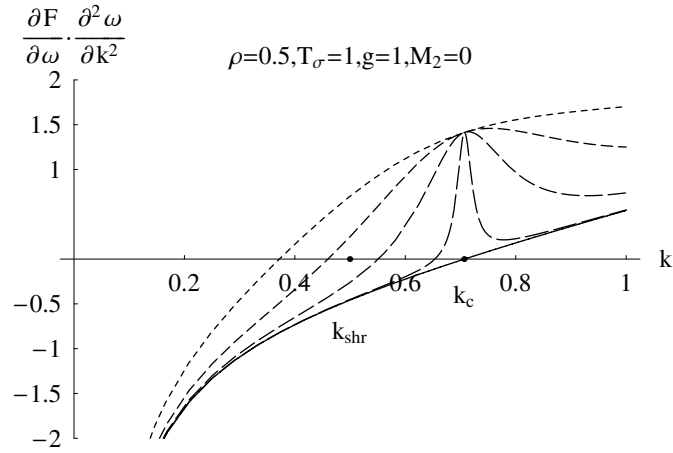


Abbildung 3.18: Für größere Geschwindigkeitsdifferenzen wandert die Nullstelle nach rechts. In der Abbildung sind Kurven $\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ für verschiedene Parameter U bei $M_2 = 0$ gezeichnet. Die durchgängig gezeichnete Linie kennzeichnet eine Strömung mit kritischer Geschwindigkeitsdifferenz U_c . Für die anderen Kurven gilt $U = 3,0595; 3,05; 3; 2,8$ und die Nullstelle wird zum Ursprung hin verschoben.

In den nächsten Abbildungen ist der vollständige Stabilitätsparameter $\lambda_{2d\pm}$ für eine Strömung mit $U = 2, \rho = 0.5, \hat{g} = 1, \hat{T}_\sigma = 1, A = 1, \mu = 1$ für verschiedene M_2 dargestellt. Die durchgezogene gezeichnete Kurve entspricht einer Strömung ohne angelegte Magnetfelder $M_2 = 0$. Je stärker die angelegten Magnetfelder sind, desto weiter rückt die Nullstelle zum Ursprung hin. Die Parameter sind $M_2 = 1; 2; 3; 3, 5$ und 4 .

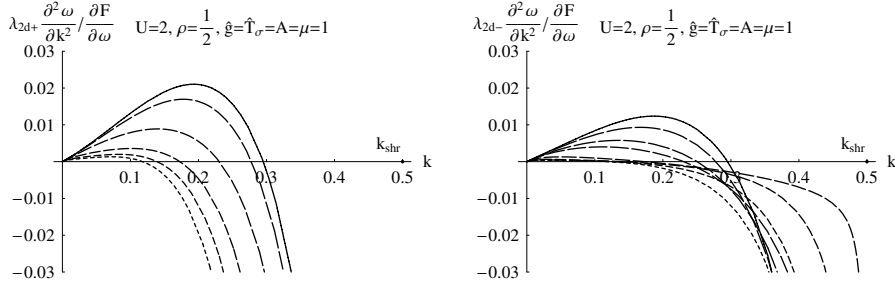


Abbildung 3.19: Die Stabilitätsparameter $\lambda_{2d\pm} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} / \frac{\partial F}{\partial \omega}$ sind über der Wellenzahl k von 0 bis zur Polstelle k_{shr} für verschiedene M_2 aufgetragen.

Die Nullstellen sind im Bereich $0 < k < k_{shr}$ durch $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ gegeben und deswegen für beide Lösungen ω_{\pm} gleich. Der unterschiedliche Verlauf ist durch den Zähler im zweiten Summanden von λ_{2d} gegeben.

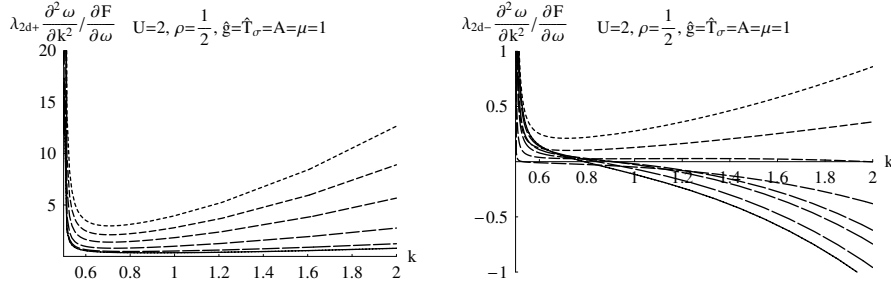


Abbildung 3.20: Die Stabilitätsparameter $\lambda_{2d\pm} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} / \frac{\partial F}{\partial \omega}$ sind über der Wellenzahl k von der Polstelle k_{shr} bis $k = 2$ aufgetragen. Die Nullstellen werden für $k > k_c$ durch λ_{2d} bestimmt und sind für die Lösungen ω_{\pm} verschieden.

Für $k > k_{shr}$ und $k \approx k_{shr}$ sind die Landaukoeffizienten $\lambda_{2d\pm}$ positiv. Sie sind Polynome 5. Grades in k . Für große k ergeben sich sehr unterschiedliche Kurvenverläufe für beide Lösungen, wie man den nächsten Abbildungen entnimmt.

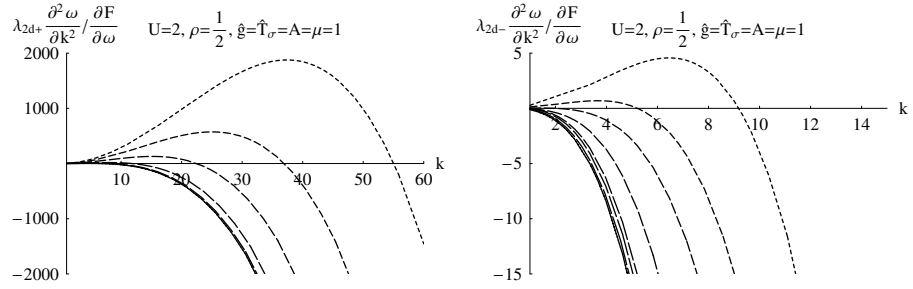


Abbildung 3.21: $\lambda_{2d\pm} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} / \frac{\partial F}{\partial \omega}$ über der Wellenzahl k .

Für das gewählte Beispiel verkleinert ein Magnetfeld den positiven Stabilitätsbereich vor der Polstelle, vergrößert ihn aber hinter der Polstelle.

Für

$$-\frac{\lambda_{2d}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \omega}\right)_{2d}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_{2d} > 0 \quad (3.153)$$

bleibt eine anfänglich lokalisierte Lösung nicht stabil. Die Amplitude nimmt mit $\frac{1}{\sqrt{T_2}}$ ab und die Störung verteilt sich im Raum [18].

Abgesehen von den Stabilitätsgrenzen nehmen die Magnetfelder über die Größen λ_{2d} , $\frac{\partial F}{\partial \omega}$ und $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ Einfluss auf die Lösung. Vergleicht man zwei Solitonen miteinander, die die gleiche Amplitude $a\sqrt{\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\partial F}{\lambda_{2d}}}$ besitzen, sich aber in Strömungen unterschiedlicher Magnetfelder befinden, können Breite und Geschwindigkeit variieren. Die Größe $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}$ geht zusätzlich noch in den exponentiellen Anteil der Lösung (3.145) mit ein und modifiziert die Zeitabhängigkeit dieses Wellenanteils. Für den gewählten Grundzustand paralleler Geschwindigkeiten und Magnetfelder ist die Wirkung der Magnetfelder sehr vielfältig. Über die Gruppengeschwindigkeit (3.75) wird auch das Verhalten auf der ε^{-1} -Skala beeinflusst. Je stärker das Magnetfeld, desto größer die Alfvéngeschwindigkeit und desto schneller breitet sich die Störung auf der ε^{-1} -Skala mit oder entgegen der Strömung aus.

Im nächsten Beispiel bewegt sich die Trägerwelle in x -Richtung, das vorgegebene Magnetfeld ist aber in y -Richtung ausgerichtet.

Die lineare Dispersionsrelation für diesen Strömungstyp lautet:

$$\hat{\omega}_{\pm} = \frac{1+U\rho}{1+\rho}k \pm \sqrt{-\frac{(1-U)^2\rho}{(1+\rho)^2}k^2 + \frac{M_2^2}{1+\rho}\left(1+\frac{B^2}{\mu}\right)l^2 + \frac{\hat{T}_\sigma}{1+\rho}\kappa^3 + \hat{g}\frac{1-\rho}{1+\rho}\kappa}, \quad (3.154)$$

wobei $M_2 = \frac{B_2}{\sqrt{\mu_2\rho_2}} \frac{1}{U_2}$ nun das Verhältnis der Alfvéngeschwindigkeit in y -Richtung und der x -Komponente der Geschwindigkeit U_2 darstellt. Obwohl sich die Grundwelle wie auch im vorherigen Fall nur in x -Richtung bewegt, darf man noch nicht $l=0$ setzen, da die zweite Ableitung im allgemeinen $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \neq 0$ ist. Es gilt der Ansatz:

$$s_1 = S_1(Y_1, T_2') e^{i(kx - \omega t)} + c.c., \quad (3.155)$$

so dass sich das Soliton senkrecht zur Trägerwelle in y -Richtung ausbreitet. Neben $A_1 = A_2 = 0$ gilt auch $l = 0$. Mit diesen Vereinbarungen erhält man aus (3.142):

$$i \frac{\partial S_1}{\partial T_2'} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \right)_{2d} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} = - \frac{\lambda_{2dW}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{2d}} |S_1|^2 S_1. \quad (3.156)$$

Das Magnetfeld liefert keinen Beitrag zur linearen Stabilität, da es senkrecht zum Wellenvektor der Trägerwelle ausgerichtet ist. In den nichtlinearen Koeffizienten $\lambda = \lambda_{2dW}$ geht es auch nicht ein. λ_{2dW} ist der von Weissman berechnete Koeffizient der Kelvin-Helmholtz-Instabilität ohne Magnetfelder in zwei Raumdimensionen. In der Entdimensionierung von Gleichung (3.133), lautet er:

$$\lambda_{2dW} = \frac{1}{2} k^2 \left\{ -4\hat{g}(1-\rho)k - \hat{T}_\sigma k^3 + 4 \frac{\left\{ (\omega - k)^2 - \rho(-\omega + Uk)^2 \right\}^2}{2\hat{T}_\sigma k^3 - \hat{g}(1-\rho)k} \right\}. \quad (3.157)$$

Die zweite Ableitung der Dispersion ω nach l ergibt für $l = 0$ einen Koeffizienten, der sein Vorzeichen für alle k nicht ändert:

$$\frac{\partial^2 \omega_{\pm}}{\partial l^2} \Big|_{l=0} = \pm \frac{M_2^2 (1 + \frac{B^2}{\mu}) \frac{1}{1+\rho} + \frac{1}{2} g \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)} \frac{1}{k} + \frac{3}{2} \frac{T_\sigma}{1+\rho} k}{\sqrt{-\frac{(1-U)^2 \rho}{(1+\rho)^2} k^2 + \frac{T_\sigma}{1+\rho} k^3 + g \frac{1-\rho}{1+\rho} k}}. \quad (3.158)$$

Für linear stabile Systeme ist die Wurzel im Nenner reell. Das Produkt von $\frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{l=0}$ und $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \Big|_{l=0}$ ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \omega} \Big|_{l=0} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \Big|_{l=0} = 2M_2^2 \left(1 + \frac{B^2}{\mu} \right) + g(1-\rho) \frac{1}{k} + 3T_\sigma k. \quad (3.159)$$

Die Stabilitätsbereiche werden also für den gewählten Fall allein durch den Landau-Koeffizienten λ_{2dW} bestimmt, da die anderen relevanten Koeffizienten ihre Vorzeichen nicht ändern. Ein zusätzliches Magnetfeld in y -Richtung modifiziert einzig und allein über $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}$ nach der Formel

$$S_1(Y_1, T_2') = a \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \frac{\partial F}{\partial \omega}}{\lambda_{2dW}}} \operatorname{sech} \left[a \left(Y_1 - b \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} T_2' \right) \right] e^{i(bY_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} (a^2 - b^2) T_2')} \quad (3.160)$$

die Amplitude und die Skala der Zeit. Nach (3.158) erhöht sich der Betrag von $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}$ um $M_2^2 (\frac{B^2}{\mu} + 1)$. Mit einer Manipulation des Verhältnisses der magnetischen Induktion B oder einem Sprung der Permeabilitäten μ wird nur der Betrag der ersten Terms in (3.159) verändert. Wie in der linearen Dispersionsrelation F wirken beide Magnetfelder der Teilströmungen in der Summe.

Ein Soliton, welches sich in y -Richtung ausbreitet und einem Magnetfeld ausgesetzt ist, ist breiter als ein Soliton mit gleicher Amplitude in einer Strömung ohne Magnetfeld. Dies sieht man am schnellsten für eine Lösung (3.160) mit $b = 0$. Dann ist die Lösung durch

$$S_1(Y_1, T_2') = a \sqrt{\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \frac{\partial F}{\partial \omega}}{\lambda_{2dW}}} \operatorname{sech}(aY_1) e^{i(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} a^2 T_2')} \quad (3.161)$$

gegeben. Wenn die Amplituden übereinstimmen, muss a im Falle eines Magnetfeldes kleiner sein, da $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}$ größer ist. a steht aber auch als Dehnungsfaktor in der einhüllenden $\text{sech}(aY_1)$ -Funktion, so dass das Soliton breiter ist. Die Zeitabhängigkeit wird in diesem Spezialfall nicht beeinflusst, da sich die Veränderungen im Produkt $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} a^2$ nicht auswirken.

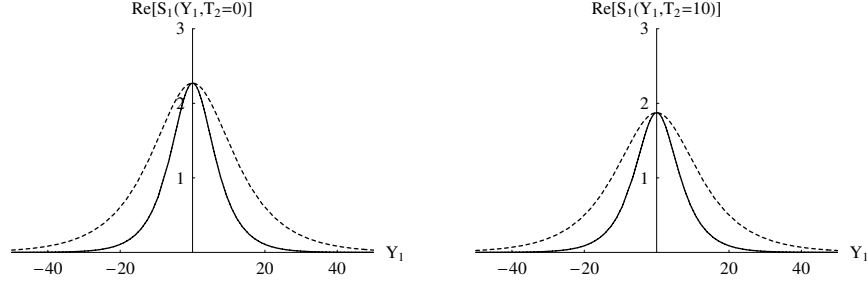


Abbildung 3.22: Solitonen $S_1(Y_1, T_2')$ zu zwei Zeitpunkten mit (gestrichelt) und ohne (durchgängig) Magnetfeld. Liegt ein Magnetfeld an, ist das Soliton breiter, besitzt aber die gleiche Zeitabhängigkeit. Die Parameter sind $U = 2, \rho = 0.8, B = 1, \mu = 1, g = 1, T_\sigma = 1, a = 0.1, b = 0$ und $M_2 = 0$ ohne und $M_2 = 1$ und $a \approx 1.9$ mit Magnetfeld.

Im Allgemeinen ist auch die Zeitabhängigkeit eine andere wie ein Beispiel mit $b \neq 0$ zeigt. Dann gilt (3.160) und da $\frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2}$ größer ist als ohne Magnetfeld ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende fortpflanzt, größer.

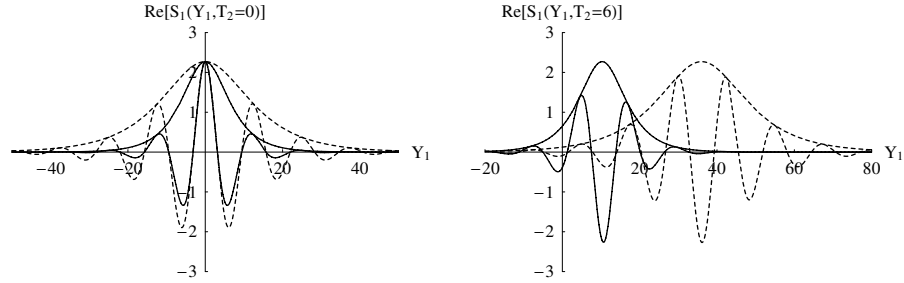


Abbildung 3.23: Zwei Zeitpunkte zweier Solitonen $S_1(Y_1, T_2)$ mit (gestrichelt) und ohne (durchgängig) Magnetfeld, die sich im Raum ausbreiten. Das Soliton, welches einem Magnetfeld ausgesetzt ist, besitzt eine größere Geschwindigkeit. Die Parameter sind $U = 2, \rho = 0.8, B = 1, \mu = 1, g = 1, T_\sigma = 1, a = 0.1, b = 0.5$ und $M_2 = 0$ ohne und $M_2 = 1$ und $a \approx 1.9$ mit Magnetfeld.

Die Bewegung der einzelnen Wellenberge und -täler wird ebenfalls beeinflusst. Da a im Falle eines Magnetfeldes kleiner ist, tritt eine Richtungsänderung schon bei kleinerem b ein. Zu dieser Geschwindigkeit kommt ebenfalls ein Beitrag durch das Magnetfeld.

Die Gruppengeschwindigkeiten werden durch die senkrecht auf dem Wellenvektor stehenden Magnetfelder nicht beeinflusst. Auf der ε^{-1} -Skala erfolgt also keine Veränderung durch die Magnetfelder.

Mit der bisherigen Diskussion der Koeffizienten kann man auch gleichförmige Wellenzüge auf ihre Stabilität untersuchen.

Benjamin-Feir-Instabilität

Die Stabilitätsanalyse von anfänglich gleichförmigen Wellenzügen ist als Benjamin-Feir-Instabilität [11],[12] bekannt. Im Grundzustand sollen die Geschwindigkeiten und Magnetfelder in x -Richtung zeigen. Die Modulation soll sich wie die Grundwelle ebenfalls nur in x -Richtung fortplanzen. Damit liegt die gleiche Situation wie beim ersten Beispiel der Solitonlösungen vor und Gleichung (3.144) gilt. Für die Amplitude wird der folgende Ansatz gewählt:

$$S_1(X_1, T_2) = \left\{ a + b_+ e^{i(KX_1 + \Omega T_2')} + b_- e^{-i(KX_1 + \Omega T_2')} \right\} e^{ia^2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} T_2'} \quad (3.162)$$

Dabei sind a, b_+ und b_- reelle Konstanten, wobei die Konstanten b_{\pm} im Vergleich zu a hinreichend klein sind, so dass quadratische Ordnungen in b_{\pm} in der Gleichung (3.144) vernachlässigt werden können. Mit K werden kleine Abweichungen von der Wellenzahl der Grundwelle beschrieben. Der Faktor $e^{ia^2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} T_2'}$ ist die Stokes'sche Frequenzkorrektur für endliche Amplituden a . Die nichtlineare Schrödingergleichung (3.144) liefert für diesen Ansatz ein homogenes System für die Konstanten b_{\pm} :

$$\begin{pmatrix} -\Omega - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 + \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2 & \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2 \\ \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2 & \Omega - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 + \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_+ \\ b_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.163)$$

Nichttriviale Lösungen erfüllen die charakteristische Gleichung

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 - 2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2 \right), \quad (3.164)$$

mit der durch Ω das zeitliche Verhalten des Wellenzuges bestimmt wird. Falls das Produkt der Koeffizienten der Schrödingergleichung positiv ist,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} > 0, \quad (3.165)$$

ist der Wellenzug für K , die in einem Bereich

$$0 < K^2 < 4 \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} \frac{1}{\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}} a^2 \quad (3.166)$$

liegen, instabil gegenüber Modulationen der Wellenzahl. Die Energie der Grundwelle wandert in Seitenbänder ab. Für

$$K = \sqrt{2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} \frac{a^2}{\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}}} \quad (3.167)$$

besitzt die Wachstumsrate ein Maximum:

$$\Omega = \pm i \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} a^2. \quad (3.168)$$

Für $\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \frac{\lambda_{2d}}{\partial F} < 0$ sind die Lösungen stabil gegenüber Modulationen der Wellenzahl. Die bei der Solitonlösung gemachte Analyse des Stabilitätsparameters im

vorangegangenen Kapitel kann hier verwendet werden.

Im Ansatz kann die zweite Raumdimension berücksichtigt werden:

$$S_1(X_1, Y_1, T_2') = \left\{ a + b_+ e^{i(KX_1 + LY_1 + \Omega T_2')} + b_- e^{-i(KX_1 + LY_1 + \Omega T_2')} \right\} e^{ia^2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial \omega} T_2'} \quad (3.169)$$

Eine entsprechende Rechnung mit Gleichung (3.143) ergibt die Dispersionsrelation

$$\Omega^2 = \frac{1}{2} \left(K^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} + 2KL \frac{\partial^2 \omega}{\partial k \partial l} + L^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial l^2} \right) \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{K \partial}{\partial k} + \frac{L \partial}{\partial l} \right)^2 \omega - 2 \frac{\lambda_{2d}}{\partial \omega} a^2 \right\}. \quad (3.170)$$

Diese allgemeine Relation schließt auch den zweiten betrachteten Spezialfall der Solitonlösungen mitein, bei dem sich die Grundwelle in x -Richtung fortpflanzt, Magnetfelder und Modulation aber in y -Richtung zeigen.

3.5.2 Linear marginal stabile Wellen $\kappa \neq \kappa_c$

Auf der neutralen Kurve verschwindet der Wurzelterm in der Dispersionsrelation (3.62). Die Wellenausbreitung erfolgt für Zustände, die auf der Neutralitätskurve liegen, ohne Dispersion und ohne Einfluss des Magnetfelds, der Schwerkraft oder der Oberflächenspannung:

$$\omega_{nk\pm} = \frac{(U_1 k + V_1 l) \rho_1 + (U_2 k + V_2 l) \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (3.171)$$

Die Ableitung der Dispersionsrelation nach ω verschwindet ebenfalls:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \right)_{nk} = 0. \quad (3.172)$$

Um Zustände in der Nähe der Neutralitätskurve zu untersuchen, kann man leicht erhöhte oder verminderte Strömungsgeschwindigkeiten wählen, die von (3.2) von einer Ordnung ε^2 abweichen. Dazu ersetzt man in den Impulsbilanzen der dritten Ordnung U_1 mit $U_1 + \delta U_1$ usw., wobei δU_1 von der Ordnung ε^2 ist. Man befindet sich dann knapp über oder unter der Neutralitätskurve im linear instabilen oder stabilen Bereich. Diese Abweichungen führen solange sie von zweiter Ordnung sind, zu einem zusätzlichen linearen Term in (3.123). Wie die Geschwindigkeitsfelder kann man auch die Magnetfelder um eine Ordnung ε^2 verstärken oder schwächen, um Zustände in der Nähe der Neutralitätskurve zu analysieren. Der zusätzliche Term lautet in dimensionsbehafteten Größen:

$$\begin{aligned} G &= -2\rho_1 (-\omega + U_1 k + V_1 l) (\delta U_1 k + \delta V_1 l) + \frac{2}{\mu_1} (A_1 k + B_1 l) (\delta A_1 k + \delta B_1 l) \\ &\quad - 2\rho_2 (-\omega + U_2 k + V_2 l) (\delta U_2 k + \delta V_2 l) + \frac{2}{\mu_2} (A_2 k + B_2 l) (\delta A_2 k + \delta B_2 l) \\ &= -F_{U_1} \delta U_1 - F_{V_1} \delta V_1 - F_{A_1} \delta A_1 - F_{B_1} \delta B_1 - F_{U_2} \delta U_2 - F_{V_2} \delta V_2 - F_{A_2} \delta A_2 - F_{B_2} \delta B_2 \end{aligned} \quad (3.173)$$

Damit werden die allgemeinen Gleichungen (3.111) und (3.123) zu:

$$\frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} = 0 \quad (3.174)$$

und

$$i \left(F_k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + F_l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) + \frac{1}{2} F_{\omega\omega} \frac{\partial^2 S_1}{\partial T_1^2} - F_{\omega k} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial T_1} + \frac{1}{2} F_{kk} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial X_1^2} \\ + F_{kl} \frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{1}{2} F_{ll} \frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} - F_{\omega l} \frac{\partial^2 S_1^2}{\partial T_1 \partial Y_1} = G S_1 + \lambda_{nk} |S_1|^2 S_1. \quad (3.175)$$

Mit diesen Gleichungen liegt nun ein System zweiter Ordnung in der Zeit vor [82]. Die Ableitung der Dispersionsrelation nach der Kreisfrequenz $\frac{\partial F}{\partial \omega}$ bestimmt dieses Verhalten. Ist $\frac{\partial F}{\partial \omega} \neq 0$ bleibt das Gleichungssystem erster Ordnung in der Zeit.

Ignoriert man zunächst die räumlichen Ableitungen der Amplitude, vereinfacht sich (3.156) auf:

$$\frac{1}{2} F_{\omega\omega} \frac{\partial^2 S_1}{\partial T_1^2} = G S_1 + \lambda_{nk} |S_1|^2 S_1. \quad (3.176)$$

Die Lösungen dieser Gleichung kann man mithilfe von Jacobischen Elliptischen Funktionen [13] darstellen. Ist das Vorzeichen von λ negativ, ist der nichtlineare Term stabilisierend, ist er positiv, destabilisierend. Der Einfachheit halber betrachtet man die Magnetfelder und Strömungsgeschwindigkeiten nur in x -Richtung und wertet den allgemeine Koeffizienten λ auf der Neutralitätskurve aus:

$$\lambda_{2dnk} = \frac{1}{2} \kappa^2 \left[-4\hat{g}(1-\rho)\kappa - \hat{T}_\sigma \kappa^3 + 4 \frac{1}{2\hat{T}_\sigma \kappa^3 - \hat{g}(1-\rho)\kappa} \cdot \frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2} \left\{ \hat{g}(1-\rho)\kappa + \hat{T}_\sigma \kappa^3 + 2M_2^2 k^2 \frac{(1-\frac{A^2}{\mu}\rho)}{1-\rho} \right\}^2 \right]. \quad (3.177)$$

Für Wellen mit Wellenzahl kleiner als die der zweiten harmonischen Resonanz

$$\kappa^2 < \frac{\hat{g}(1-\rho)}{2\hat{T}_\sigma} \quad (3.178)$$

ist auch der zweite Summand negativ und $\lambda_{2dnk} < 0$. Der nichtlineare Term wirkt stabilisierend. Überhalb der zweiten harmonischen Resonanzstelle für

$$\kappa^2 > \frac{\hat{g}(1-\rho)}{2\hat{T}_\sigma} \quad (3.179)$$

muss für einen destabilisierenden Effekt

$$\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2} > \frac{\frac{1}{4} \left(4\hat{g}\kappa(1-\rho) + \hat{T}_\sigma \kappa^3 \right) \left(2\hat{T}_\sigma \kappa^3 - \hat{g}\kappa(1-\rho) \right)}{\left\{ \hat{g}\kappa(1-\rho) + \hat{T}_\sigma \kappa^3 + 2M_2^2 \frac{(1-\frac{A^2}{\mu}\rho)}{1-\rho} k^2 \right\}^2} \quad (3.180)$$

gelten, damit $\lambda_{2dnk} > 0$ wird. Für ein Induktions- und Permeabilitätsverhältnis von $A = \mu = 1$ vereinfacht sich diese Bedingung auf:

$$\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2} > \frac{\frac{1}{4} \left(4\hat{g}\kappa(1-\rho) + \hat{T}_\sigma \kappa^3 \right) \left(2\hat{T}_\sigma \kappa^3 - \hat{g}\kappa(1-\rho) \right)}{\left\{ \hat{g}\kappa(1-\rho) + \hat{T}_\sigma \kappa^3 + 2M_2^2 k^2 \right\}^2}. \quad (3.181)$$

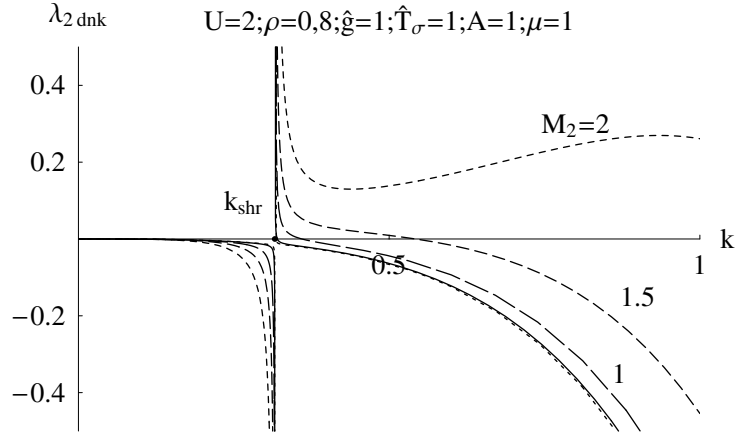


Abbildung 3.24: λ_{2dnk} für marginal stabile Wellen für verschiedene Magnetfelder und $l = 0$. Die durchgängig gezeichnete Kurve gehört zu $M_2 = 0$.

Die beiden Gleichungen sind Verallgemeinerungen von Weissmans Ergebnis [82]. Seine Gleichungen ergeben sich im Grenzfall ohne Magnetfelder. Die Stabilitätsaussage hängt von den Wellenzahlen k und κ ab. Der Beitrag durch die Magnetfelder kann das Vorzeichen wechseln. Dazu muss

$$\frac{A^2}{\mu} \rho > 1 \quad (3.182)$$

gelten. In diesem Fall wirken im zweiten Summanden die Magnetfelder gegen die Schwerkraft und Oberflächenspannung. Ein Gleichheitszeichen in der Ungleichung hebt den Beitrag der Magnetfelder auf.

In der Abbildung (3.24) erkennt man für $A = \mu = 1$, dass die Magnetfelder die Strömung für $k < k_{shr}$ stabilisieren und für $k > k_{shr}$ destabilisieren. Für $\frac{A^2}{\mu} > \rho$ kehren sich die Effekte für einen kleinen Bereich um, wie man an der gestrichelten Kurve in der unmittelbaren Umgebung der durchgezogenen Kurve erkennt. Für den Spezialfall gleicher Dichten $\rho = 1$ verschwindet der stabilisierende Effekt der Schwerkraft und die Polstelle der zweiten harmonische Resonanz. Der Landaukoeffizient wird zu

$$\lambda_{2dnk} = \frac{1}{2} \kappa^2 \left[-T_\sigma \kappa^3 + \frac{\left\{ 2M_2^2 \left(1 - \frac{A^2}{\mu} \right)^2 k^2 \right\}^2}{2T_\sigma \kappa^3} \right]. \quad (3.183)$$

Wenn

$$\left\{ 2M_2^2 \left(1 - \frac{A^2}{\mu} \right)^2 \right\}^2 k^4 > 2T_\sigma^2 \kappa^6, \quad (3.184)$$

ist λ_{2dnk} positiv und destabilisierend. Für gleichstarke Magnetfelder auf beiden Seiten der Trennfläche $A = \mu = 1$ verschwindet der Beitrag durch die Magnetfelder und die Oberflächenspannung alleine ergibt einen stabilisierenden Effekt. Für hinreichend große Wellenzahlen überwiegt die Oberflächenspannung.

Gleichförmiger Wellenzug

Für eine rein zeitabhängige Amplitude $S_1(T'_2)$ vereinfacht sich (3.156) auf:

$$\frac{\partial^2 S_1}{\partial T_1'^2} = \frac{2G}{F_{\omega\omega}} S_1 + \frac{2\lambda_{nk}}{F_{\omega\omega}} |S_1|^2 S_1. \quad (3.185)$$

Diese Gleichung gilt sowohl für lineare als auch nichtlineare Wellen. Der nichtlineare Term überwiegt den linearen für eine Amplitude S_1 mit

$$|S_1|^2 > \left| \frac{G}{\lambda_{nk}} \right|. \quad (3.186)$$

Die Amplitude S_1 ist im allgemeinen eine komplexe Größe. Sie soll hier aber der Einfachheit halber reell angenommen werden. Dann erkennt man leicht, dass

$$\left(\frac{dS_1}{dT_2'} \right)^2 - \frac{G}{F_{\omega\omega}} S_1^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda_{nk}}{F_{\omega\omega}} S_1^4 = konst. \quad (3.187)$$

Der lineare Effekt ist entweder stabilisierend oder destabilisierend, je nachdem man sich durch den Zusatz an Magnetfeld oder Geschwindigkeit ober- oder unterhalb der Neutralitätskurve befindet. Die zweite Ableitung der Dispersionsrelation nach ω spielt eine untergeordnete Rolle, da sie als Koeffizient sowohl vor dem linearen als auch nichtlinearen Term vorkommt. Man kann nun vier verschiedene Fälle für Strömungssituationen in der Nähe der Neutralitätskurve ausmachen. Der lineare und nichtlineare Term wirken miteinander oder gegeneinander. Wirken sie gegeneinander, bestimmt die Größe der Amplitude, welcher der beiden Terme überwiegt. Wenn beide Effekte stabilisierend wirken, liegt eine stabile Lösung vor.

Eine Strömung kann linear instabil sein, sobald die Amplitude jedoch hinreichend angewachsen ist, kann ein stabilisierender nichtlinearer Effekt eintreten. Ist die Strömung linear stabil, die nichtlinearen Effekte jedoch destabilisierend, so nennt man die Strömung nichtlinear instabil oder subkritisch instabil. Die Größe der Amplitude bestimmt dann über die Stabilität. Sind die linearisierten Gleichung eine gute Näherung, ist die Strömung stabil.

Wenn beide Effekte die Strömung destabilisieren, spricht man von superexponentiellem Wachstum. Die Nichtlinearität verstärkt das lineare exponentielle Ansteigen der Amplitude.

3.5.3 Linear marginal stabile Wellen bei $\kappa = \kappa_c$

Die neutrale Kurve besitzt ein Minimum. In diesem Punkt verschwinden für eine Welle mit $l = 0$ neben der Ableitung der Dispersionsrelation nach der Kreisfrequenz ω auch die nach der Wellenzahlkomponenten k [82]:

$$F_\omega = F_k = 0. \quad (3.188)$$

Die Ableitung F_l ergibt in dimensionsbehafteten Größen:

$$F_l = 2k \left\{ \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (U_1 - U_2) (V_1 - V_2) - \frac{A_1 B_1}{\mu_1} - \frac{A_2 B_2}{\mu_2} \right\} \quad (3.189)$$

und verschwindet nur dann, wenn Geschwindigkeitsdifferenzen und Magnetfelder entweder in x - oder y -Richtung zeigen. Solche Systeme werden im folgenden untersucht. Mit $F_l = 0$ gilt auch $F_{kl} = F_{\omega l} = 0$ [82]. Die erste der beiden Evolutionsgleichungen ist dann trivialerweise erfüllt. In der zweiten Gleichung bleiben nur Ableitungen der ε^{-1} -Skalen erhalten:

$$\frac{1}{2}F_{\omega\omega}\frac{\partial S_1^2}{\partial T_1^2} - F_{\omega k}\frac{\partial S_1^2}{\partial T_1\partial X_1} + \frac{1}{2}F_{kk}\frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + \frac{1}{2}F_{ll}\frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} = GS_1 + \lambda_c|S_1|^2S_1. \quad (3.190)$$

Die Koeffizienten müssen am kritischen Punkt k_c ausgewertet werden. Der Transformation von Weissman [82] folgend, wird die Gleichung umgeformt. Die Komponenten der Gruppengeschwindigkeit sind überall auf der Neutralitätskurve unendlich, außer im Minimum. Dieses Verhalten wird auch in Abbildung (3.10) gezeigt, wo sich die Lösungsäste von $\omega(k)$ sich in einer Senkrechten auf der Neutralitätskurve treffen, nur im Minimum nicht. Dort kann man eine Form der Gleichung wählen, die die Gruppengeschwindigkeit enthält. Mit den neu definierten Größen

$$c = -\frac{F_{\omega k}}{F_{\omega\omega}}, \quad \omega_k = +\frac{\sqrt{(F_{\omega k}^2 - F_{\omega\omega}F_{kk})}}{F_{\omega\omega}}, \quad \omega_l = +\sqrt{-\frac{F_{ll}}{F_{\omega\omega}}} \quad (3.191)$$

erhält man:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T_1} + c\frac{\partial}{\partial X_1}\right)^2 S_1 - \omega_k^2\frac{\partial^2 S_1}{\partial X_1^2} + \omega_l^2\frac{\partial^2 S_1}{\partial Y_1^2} = \frac{2G}{F_{\omega\omega}}S_1 + \frac{2\lambda_c}{F_{\omega\omega}}|S_1|^2S_1. \quad (3.192)$$

Dabei ist $c = \frac{U_1\rho_1 + U_2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$. Durch Wahl eines Koordinatensystems, welches sich mit der dieser Geschwindigkeit bewegt ($X' = X - cT$), gewinnt man eine nicht-lineare Klein-Gordon-Gleichung:

$$\frac{\partial S_1^2}{\partial T_1'^2} - \omega_k^2\frac{\partial S_1^2}{\partial X_1'^2} - \omega_l^2\frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1'^2} = \frac{2G}{F_{\omega\omega}}S_1 + \frac{2\lambda_c}{F_{\omega\omega}}|S_1|^2S_1. \quad (3.193)$$

Die Koeffizienten werden am kritischen Punkt ausgewertet. Es gilt im allgemeinen:

$$F_{\omega\omega}(k_c) = 2(\rho_1 + \rho_2), \quad (3.194)$$

$$\omega_k = \sqrt{-\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}(U_1 - U_2)^2 + \frac{A_1^2}{\mu_1(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{A_2^2}{\mu_2(\rho_1 + \rho_2)} + 3\frac{\sqrt{T_\sigma g(\rho_2 - \rho_1)}}{\rho_1 + \rho_2}}, \quad (3.195)$$

$$\omega_l = \sqrt{-\frac{V_1^2\rho_1 + V_2^2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{B_1^2}{\mu_1(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{B_2^2}{\mu_2(\rho_1 + \rho_2)} + 2\frac{\sqrt{T_\sigma g(\rho_2 - \rho_1)}}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (3.196)$$

Dabei darf die Bedingung $F_l = 0$ mit F_l aus (3.189) nicht vergessen werden, die besagt, dass Geschwindigkeiten und Magnetfelder des Grundzustands nur in x - oder y -Richtung zeigen dürfen. Zeigen beide nur in x -Richtung, ist der Landaukoeffizient gegeben durch:

$$\lambda_{2dc} = \frac{1}{2} \left[-5 + 4\frac{(1-\rho)^2}{(1+\rho)^2} \left(2 + 4M_2^2\frac{(1-\frac{A^2}{\mu}\rho)}{1-\rho} \right)^2 \right]. \quad (3.197)$$

Mit den Skalen $\hat{g}(1 - \rho) = 1$ und $\hat{T}_\sigma = 1$ ist der kritische Punkt durch $k_c = 1$ gegeben. Das Vorzeichen von λ_{2dc} kann wechseln. Der nichtlineare Term kann stabilisierend oder destabilisierend wirken. Für $A = \mu = 1$ erhält man eine Bedingung für einen destabilisierenden nichtlinearen Effekt in Abhängigkeit der angelegten Magnetfelder durch den Parameter M_2 :

$$\rho = \frac{1}{-5 + 16\alpha} \left(5 + 16\alpha - \sqrt{320\alpha} \right) \quad (3.198)$$

mit $\alpha = 1 + 2M_2^2 + M_2^4 > 0$. Für verschwindende Magnetfelder ($\alpha = 1$) erhält man das bekannte Ergebnis von Weissman [82]:

$$\rho < 0,283. \quad (3.199)$$

Durch die angelegten Magnetfelder wird das kritische Dichteverhältnis angehoben, die Magnetfelder haben eine destabilisierende Wirkung bezüglich des Dichteeinflusses.

Nichtlineare Einhüllende permanenter Form

In diesem Abschnitt werden Lösungen der nichtlinearen Klein-Gordon-Gleichung untersucht. Für Wellenbewegungen, die ihre Gestalt behalten, kann der Ansatz

$$S_1 = S_1(X_1 - VT_1) \quad (3.200)$$

gewählt werden mit $\chi = X_1 - VT_1$. Die nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung wird dann zu:

$$(V^2 - \omega_k^2) \frac{\partial^2 S_1}{\partial \chi^2} = \frac{2G}{F_{\omega\omega}} S_1 + \frac{2\lambda_c}{F_{\omega\omega}} |S_1|^2 S_1. \quad (3.201)$$

Die folgende Diskussion richtet sich nach der Vorgehensweise von Weissman [82]. Der interessanteste Fall ist der, bei der die lineare Instabilität durch nichtlineare Effekte stabilisiert wird. Je nach Vorzeichen der Größen $(V^2 - \omega_k^2)$, G und λ_c besitzt die Gleichungen unterschiedliche Lösungen. G kann mit δA_1 oder δU_1 stets so gewählt werden, so dass $G > 0$ und λ_c ist für ein bestimmtes Dichteverhältnis negativ. Zunächst sei $V^2 - \omega_k^2 < 0$, dann ist

$$S_1 = S_0 sn(\alpha(X_1 - VT_1)|m) \quad (3.202)$$

eine Lösung von (3.201), wobei mit sn eine von den Jacobischen Elliptischen Funktionen [13] bezeichnet wird und

$$V^2 = \omega_k^2 - \frac{2G - (S_0^2 |\lambda_c|)}{\alpha^2 F_{\omega\omega}}, \quad (3.203)$$

$$m = \frac{S_0^2 |\lambda_c|}{2G - S_0^2 |\lambda_c|} \quad (3.204)$$

sind. Der Parameter m bestimmt die Form der Lösung und ist abhängig von der Amplitude S_0 . Für hinreichend kleine S_0 nimmt die Lösung die Form der Sinus-Funktion an, im Grenzfall S_0 gegen $\sqrt{\frac{G}{|\lambda_c|}}$ und m gegen 1 kann die Elliptische Funktion durch den Tangens hyperbolicus ausgedrückt werden:

$$S_1 = S_0 \tanh(\alpha(X_1 - VT_1)) \quad (3.205)$$

mit $V^2 = \omega_k^2 - \frac{G}{\alpha^2 F_{\omega\omega}}$. Wenn S_0 gegen $\sqrt{\frac{|\lambda_c|}{G}}$ geht, kompensieren sich der lineare und nichtlineare Effekt. Für $S_0 < \sqrt{\frac{G}{|\lambda_c|}}$ überwiegt der lineare Effekt. Für $S_0 > \sqrt{\frac{G}{|\lambda_c|}}$ der nichtlineare. Der Tangens hyperbolicus beschreibt einen Phasenwechsel der Trägerwelle, da sich über der Skala $\frac{1}{\alpha}$ das Vorzeichen von S_1 und somit der Amplitude der Trägerwelle ändert. Wählt man im Ansatz V^2 etwas größer als ω_k^2 , ist die Lösung durch die Jacobische Elliptische Funktion dn [82] gegeben:

$$S_1 = S_0 dn(\alpha(X - VT)|m), \quad (3.206)$$

$$V^2 = \omega_k^2 + \frac{|\lambda_c| S_0^2}{\alpha^2 F_{\omega\omega}}, \quad (3.207)$$

$$m = 2\left(1 - \frac{G}{S_0^2 |\lambda_c|}\right). \quad (3.208)$$

Diese Lösung besitzt eine höhere Geschwindigkeit als die Gruppengeschwindigkeit ω_k . Je größer die Skala umso schneller bewegt sich die Lösung fort. Für $S_0 = \sqrt{\frac{G}{-\lambda_c}}$ ist $m = 0$ und dn geht über in die konstante Funktion 1. Für $S_0 = \sqrt{\frac{2G}{-\lambda_c}}$ wird $m = 1$ und die Jacobische Elliptische Funktion kann durch den $sech$ ausgedrückt werden:

$$S_1 = \sqrt{2} \sqrt{\frac{G}{-\lambda_c}} \operatorname{sech}(\alpha(X_1 - VT_1)), \quad (3.209)$$

$$V^2 = \omega_k^2 + \frac{2G}{\alpha^2 F_{\omega\omega}}. \quad (3.210)$$

Für größere Amplituden $S_0 > \sqrt{\frac{2G}{-\lambda_c}}$ ist die Jacobische Elliptische Funktion cn Lösung der Gleichung (3.201):

$$S_1 = S_0 cn(\alpha(X_1 - VT_1)|m), \quad (3.211)$$

$$V^2 = \omega_k^2 + 2 \frac{S_0^2 |\lambda_c| - G}{\alpha^2 F_{\omega\omega}}, \quad (3.212)$$

$$m = \frac{\frac{S_0^2 |\lambda_c|}{G}}{2\left(\frac{S_0^2 |\lambda_c|}{G} - 1\right)}. \quad (3.213)$$

Für $S_0 = \sqrt{\frac{2G}{-\lambda_c}}$ und $m = 1$ ergibt sich wieder die $sech$ -Funktion. Für S_0 gegen unendlich wird $m = \frac{1}{2}$ und die Darstellung der Lösung ist durch cn gegeben. Die Magnetfelder in x -Richtung nehmen über die Größe ω_k (3.195) Einfluss auf die Gültigkeitsbereiche der einzelnen Lösungen. Zusätzlich gehen die Magnetfelder in den Landaukoeffizienten (3.197) mit ein. Wenn man also zwei Lösungen gleicher Amplitude S_0 in Strömungssystemen unterschiedlicher Magnetfelder miteinander vergleicht, unterscheiden sich die Lösungen in Form und Geschwindigkeit voneinander.

Für den ausgewählten Fall ist λ negativ. Angelegte Magnetfelder verkleinern den Betrag der Landaukoeffizienten, das heißt ein zusätzliches Magnetfeld verringert den stabilisierenden Effekt. In den folgenden Abbildungen sind Beispiellösungen

gezeigt:

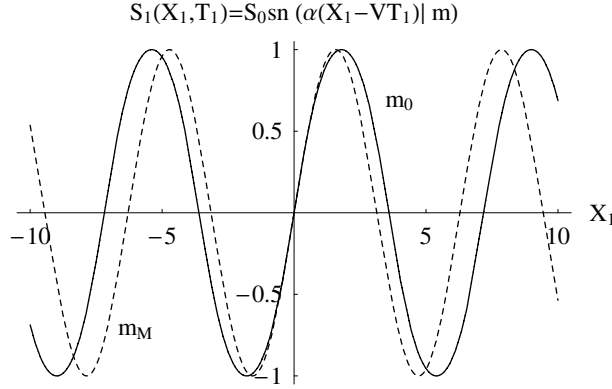


Abbildung 3.25: *sn*-Lösungen für eine Strömung mit ($m_M \approx 0.004$) und ohne ($m_0 = 0.43$) Magnetfeld. Die anderen Parameter sind: $S_0 = 1$; $G = 4$; $\alpha = 1$; $\rho = 0,8$; $F_{\omega\omega} = 3,6$; $\lambda_c(M_2 = 0) \approx -2,4$; $\lambda_c(M_2 = \sqrt{2}) \approx -0,03$.

In Abbildung (3.25) ist aufgrund des im Vergleich zu einer Strömung ohne Magnetfeld der Parameter $m_M < m_0$ und die Form ähnelt noch stärker einer Sinusfunktion. Diese Lösung pflanzt sich gemäß der Formel (3.203) mit einer kleineren Geschwindigkeit fort.

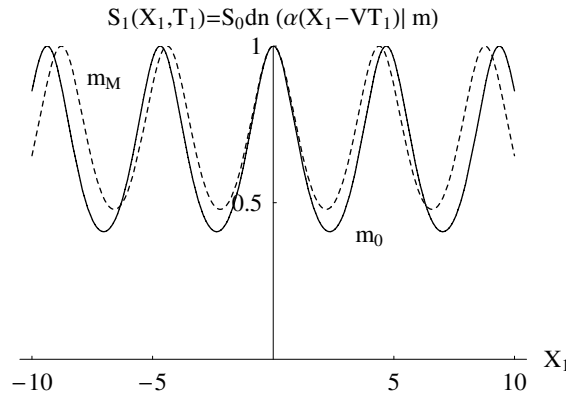


Abbildung 3.26: *dn*-Lösungen für eine Strömung mit ($m_M \approx 0.77$) und ohne ($m_0 = 0.83$) Magnetfeld. Die anderen Parameter sind: $S_0 = 1$; $G = 1.4$; $\alpha = 1$; $\rho = 0,8$; $F_{\omega\omega} = 3,6$; $\lambda_c(M_2 = 0) \approx -2,4$; $\lambda_c(M_2 = 0,5) \approx -2,28$.

In Abbildung (3.26) gilt $m_M < m_0$. In einer Strömung mit Magnetfeld pflanzt sich die Störung langsamer fort.

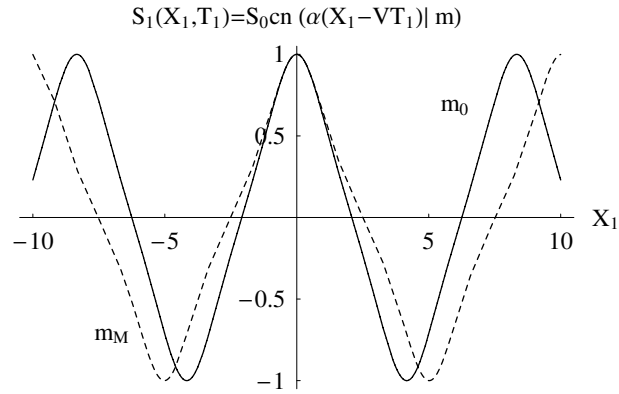


Abbildung 3.27: Bei den cn -Lösungen gilt $m_M > m_0$. Die Parameter der Lösungen sind: $S_0 = 1$; $G = 0.7$; $\alpha = 1$; $\rho = 0.8$; $F_{\omega\omega} = 3.6$; $\lambda_c(M_2 = 0) \approx -2.4$; $\lambda_c(M_2 = 1) \approx -1.6$.

Durch die Multiple Skalen Analyse wurden für endliche Amplituden Evolutionsgleichungen abgeleitet. Für linear stabile Wellen gilt eine nichtlineare Schrödingergleichung mit kubischer Nichtlinearität mit reellen Koeffizienten. Für linear metastabile Wellen gilt eine nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung mit kubischer Nichtlinearität. Die Magnetfelder beeinflussen in komplexer Weise die nichtlinearen Effekte. Sie können stabilisierend oder destabilisierend auf die Wellenbewegungen wirken.

Kapitel 4

Magnetohydrodynamische Kelvin-Helmholtz- Instabilität zweier Fluide in Boussinesq-Näherung

Das Kelvin-Helmholtz-Problem kompressibler Fluide ist komplexer als das entsprechende Problem inkompressibler Fluide. In die Beschreibung eines kompressiblen Fluids rückt an die Stelle der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ die vollständige Kontinuitätsgleichung $\dot{\rho} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$. Das daraus entstehende Gleichungssystem aus Kontinuitätsgleichung, Impulsbilanz und Induktionsgleichung muss durch eine zusätzliche thermodynamische Funktion erweitert werden, die den Druck p , die Massendichte ρ und eine weitere thermodynamische Zustandsvariable miteinander verknüpft. Mit der Annahme konstanter Entropie ist das Gleichungssystem mit einer Zustandsfunktion der Gleichgewichtsthermodynamik $p(\rho)$ geschlossen. In dieser Theorie tritt neben der Alfvéngeschwindigkeit die isentrope Schallgeschwindigkeit $\frac{\partial p}{\partial \rho}|_S = c_S$ auf. Die Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld lautet [25]:

$$\ddot{\vec{v}} - c_S^2 \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{c}_A \times \nabla \times \{\nabla \times (\vec{v} \times \vec{c}_A)\} = 0. \quad (4.1)$$

In einem kompressiblen magnetohydrodynamischen Fluid existieren drei Wellentypen, die sich mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Neben den Alfvénwellen gibt es noch zwei magneto-akustische Wellenarten. In Abbildung (4.1) kann man das Ausbreitungsverhalten der Wellen in einem Friedrichs-Diagramm ablesen.

Die Wellenausbreitung ist anisotrop und für jeden Wellentyp verschieden, aber dispersionslos. Beim Kelvin-Helmholtz-Problem kompressibler magnetohydrodynamischer Fluide werden die freien Alfvénwellen wie beim inkompressiblen Fall durch die kinematische Übergangsbedingung ausgeschlossen [68]. Dennoch bleibt das Problem sehr viel anspruchsvoller. Pu und Kivelson haben für die Kelvin-Helmholtz-Instabilität kompressibler Fluide [68] bereits in der linearisierten Theorie eine implizite Dispersionsrelation zehnter Ordnung in ω abgeleitet. Ohne Magnetfeld erhält man die Ergebnisse von Landau [42] und Fejer

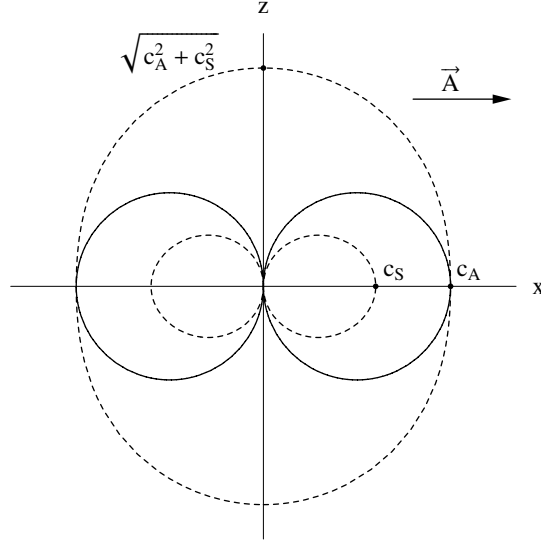


Abbildung 4.1: Friedrichsdiagramm für eine magnetische Induktion \vec{A} in x -Richtung und $|\vec{c}_A| > c_s$; die Phasengeschwindigkeiten der magneto-akustischen Wellen sind gestrichelt eingezeichnet. Sie bilden im allgemeinen keine Kreiskurven, die Alfvénwellen dagegen schon.

und Miles [23].

Durch Anwendung der Boussinesq-Näherung kann die Komplexität der Wellenausbreitung in kompressiblen magnetohydrodynamischen Fluiden reduziert werden. Das Fluid soll einen Gradienten der Massendichte senkrecht zur Trennfläche $\rho_0(z)$ aufweisen. In allen Gleichungen wird die Massendichte als konstant angenommen, nur im Auftriebsterm der Impulsbilanz nicht. In diesem System gilt weiterhin $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Die Kontinuitätsgleichung zerfällt in zwei Teile, von denen jeder für sich gültig sein muss.

Der in der klassischen Magnetoakustik geforderte Zusammenhang zwischen dem Druck p und der Massendichte ρ entfällt. Die Kontinuitätsgleichung liefert neben der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes noch eine weitere Gleichung, mit der sich die Dichteschwankung $\tilde{\rho}$ ausrechnen läßt. Der Druck ergibt sich wie im Falle inkompressibler Fluide aus den Impulsbilanzen. Die Feldgleichungen in der Boussinesq-Näherung (1.60) bis (1.62) lauten in erster Ordnung:

$$\dot{\tilde{\rho}}_1 + (\vec{V} \cdot \nabla) \tilde{\rho}_1 = -w_1 \frac{d\rho_0}{dz}, \quad \nabla \cdot \vec{v}_1 = 0, \quad (4.2)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0^*} \nabla p_1 + \frac{1}{\mu \rho_0^*} (\nabla \times \vec{b}_1) \times \vec{B} + \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho}_1 \vec{e}_z, \quad (4.3)$$

$$\dot{\vec{b}}_1 + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{b}_1 = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{v}_1, \quad \nabla \cdot \vec{b}_1 = 0. \quad (4.4)$$

Die in der Impulsbilanz als konstant angenommene Massendichte wird mit ρ_0^* bezeichnet. Das Gleichungssystem (4.2) bis (4.4) lässt sich in eine einzige Gleichung für das Geschwindigkeitsfeld umformen:

$$\left\{ \left(\partial_t + \vec{V} \cdot \nabla \right)^2 - \frac{1}{\mu \rho_0^*} \left(\vec{B} \cdot \nabla \right)^2 \right\} \Delta \vec{v}_1 = \nabla \times \nabla \times \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w_1 \vec{e}_z. \quad (4.5)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite entspricht der Differentialgleichung eines inkompressiblen Fluids mit räumlich konstanter Dichte (3.33). Die Boussinesq-Näherung äußert sich in dem zusätzlichen Term auf der rechten Seite. Eine Unterscheidung zwischen einer Wellenlösung und der Laplace-Lösung wie in (3.35) und (3.36) ist hier nicht möglich.

Für die in der Abbildung (4.2) dargestellten Problemstellung in zwei Dimensionen mit gegebenen Geschwindigkeiten U und magnetischen Induktionen A in x -Richtung, vereinfacht sich (4.5) für die z -Komponente der Geschwindigkeit einer Teilströmung auf:

$$\left\{ (\partial_t + U\partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu\rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \Delta w_1 = \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} w_{1xx}. \quad (4.6)$$

Der Koeffizient auf der rechten Seite ist als Quadrat der Brunt-Väisälä-Frequenz definiert:

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}. \quad (4.7)$$

Im allgemeinen ist die Brunt-Väisälä-Frequenz N eine Funktion des Ortes, im gewählten Koordinatensystem z -abhängig. Für den Spezialfall einer räumlich exponentiell ansteigenden oder abklingenden Massendichte ergibt sich für die Brunt-Väisälä-Frequenz eine Konstante.

Dann liegt mit (4.6) eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten vor. Für eine ebene Welle $w_1 \propto e^{i(kx+mz-\omega t)}$ erhält man daraus die folgende Dispersionsrelation:

$$F_B = \left\{ (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu\rho_0^*} k^2 \right\} (k^2 + m^2) - N^2 k^2 = 0. \quad (4.8)$$

Statt der zwei magneto-akustischen Wellentypen eines kompressiblen Fluids, gibt es hier nur die Boussinesq-Alfvénwellen mit der Dispersionsrelation (4.8). Sie geht bei verschwindendem Magnetfeld in die bekannte Dispersionsrelation für dichtegeschichtete Strömungen über [48], [76]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit setzt sich hier aus der Alfvéngeschwindigkeit und der Brunt-Väisälä-Frequenz zusammen. Die Auswirkungen der Dichteschichtung auf die Alfvénwellen werden in den nächsten Unterkapiteln diskutiert.

Reine Schwerewellen

In einem ruhenden Fluid ohne Magnetfeld vereinfachen sich die Lösungen der Dispersionsrelation (4.8) auf:

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{N^2 k^2}{(k^2 + m^2)}}. \quad (4.9)$$

Für eine gegebene ebene Welle ist k^2 und m^2 positiv, so dass Wellen in einem Medium mit positivem Massendichtegradienten $N^2 < 0$ instabil sind, weil die Welle zur Lösung ω_+ mit positivem Imaginärteil exponentiell in der Zeit anwächst. Ebene Wellen in einem Medium mit negativem Dichtegradienten $N^2 > 0$ sind stabil.

Für ein Wellenfeld $w_1 \propto e^{i(kx-\omega t)} e^{\pm mz}$, welches in z -Richtung exponentiell zunimmt oder abklingt, wechselt m^2 in der Dispersionsrelation (4.8) das Vorzeichen und die Kreisfrequenzen lauten:

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{N^2 k^2}{(k^2 - m^2)}}. \quad (4.10)$$

Ist

$$m^2 < k^2 \quad \forall \quad N^2 > 0 \quad \text{oder} \quad m^2 > k^2 \quad \forall \quad N^2 < 0 \quad (4.11)$$

kann sich diese Wellenform stabil in einem Medium mit negativem bzw. positivem Massendichtegradienten fortpflanzen. Die jeweils entgegengesetzten Fälle sind instabil, da eine der beiden angesetzten Wellen mit der Zeit exponentiell anwachsen würde. Die Stabilität dieser Wellen richtet sich nach dem Vorzeichen der Differenz $k^2 - m^2$ und dem Vorzeichen des Massendichtegradienten.

Bei der Kelvin-Helmholtz-Instabilität treten in den Teilströmungen sowohl rein ebene Wellen als auch solche Wellen, die in z -Richtung abklingen, auf.

Die abklingenden Lösungen (4.10) unterscheiden sich von den Laplace-Lösungen, da die Wellenzahl m erst über die Dispersionsrelation (4.8) bestimmt wird, während sie bei den Laplace-Lösungen im Zweidimensionalen einfach durch k gegeben ist.

Die Wellenausbreitung erfolgt dispersiv und anisotrop. Die Komponenten der Gruppengeschwindigkeit der ebenen Wellen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial k} &= \frac{N^2 k m^2}{(k^2 + m^2)^2} \left(\pm \sqrt{\frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2}} \right)^{-1}, \\ \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial m} &= \frac{-N^2 k^2 m}{(k^2 + m^2)^2} \left(\pm \sqrt{\frac{N^2 k^2}{k^2 + m^2}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Im Gegensatz zu den freien Alfvénwellen, die Energie nur in Richtung der Magnetfeldlinien transportieren, kann Energie sowohl senkrecht als auch waagrecht zum Massendichtegradienten transportiert werden. Das Vorzeichen in der letzten Gleichung ist wichtig. Schon Acheson [1] wies daraufhin. Die Gruppengeschwindigkeit $(\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial m})$ steht senkrecht auf dem Wellenvektor (k, m) [76]. Bei der korrekten Auswahl der Lösungen für die Teilströmungen muss diese Eigenschaft beachtet werden. Energie wird stets von der Wirbelschicht abgestrahlt.

4.1 Boussinesq-Alfvénwellen

In einem magnetohydrodynamischen Fluid mit Massendichtegradienten wirken nun beide rückstellenden Kräfte des Magnetfelds und der Dichteschichtung zusammen. Als Ergebnis erhält man einen Wellentyp, dessen Ausbreitung von der Stärke und Richtung des Magnetfelds und des Massendichtegradienten abhängt. Der Transport von Energie erfolgt anisotrop durch den Raum, ist aber nicht mehr nur an die Magnetfeldlinien gebunden, wie es bei den klassischen Alfvénwellen der Fall ist. Energie kann auch senkrecht zu ihnen transportiert werden.

Die Dispersionsrelation (4.8) nach ω aufgelöst ergibt für reine ebene Wellen:

$$\omega_{\pm} = Uk \pm k \sqrt{\frac{A^2}{\mu\rho_0^*} + \frac{N^2}{k^2 + m^2}} = \kappa \cos(\gamma) \left(U \pm \sqrt{\frac{A^2}{\mu\rho_0^*} + \frac{N^2}{\kappa^2}} \right). \quad (4.13)$$

Der Winkel zwischen x -Achse und Wellenvektor \vec{k} wird mit γ bezeichnet. Es gilt also:

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ m \end{pmatrix}, \quad \kappa = |\sqrt{k^2 + m^2}|, \quad \cos(\gamma) = \frac{k}{\kappa}, \quad \sin(\gamma) = \frac{m}{\kappa}. \quad (4.14)$$

Das Magnetfeld hat einen stabilisierenden Effekt auf ebene Wellen in einem Medium mit positivem Massendichtegradienten ($N^2 < 0$). Ein geschichtetes Medium wird erst für ebene Wellen mit einer Wellenzahl $\kappa < \kappa_{min}$ instabil, wobei

$$\kappa_{min}^2 = -N^2 \frac{\mu\rho_0^*}{A^2}. \quad (4.15)$$

Das Stabilitätskriterium für Wellenformen mit abklingender Seite verändert sich ebenfalls. Es muss

$$m^2 < k^2 + \frac{N^2}{\frac{A^2}{\mu\rho_0^*}} \quad \forall \quad N^2 > 0 \quad \text{oder} \quad m^2 > k^2, m^2 < k^2 - \frac{|N^2|}{\frac{A^2}{\mu\rho_0^*}} \quad \forall \quad N^2 < 0 \quad (4.16)$$

für Stabilität gelten. Bei wellenzahlabhängigen Stabilitätskriterien ist die Strömung im allgemeinen instabil, da bestimmte lokal begrenzte infinitesimale Störungen aus einer Überlagerung vieler ebener Wellen mit Wellenzahlen aus einem weiten Spektrum bestehen.

In der Abbildung (4.2) ist die Phasengeschwindigkeit rein ebener Wellen mit stabiler Schichtung in einem ruhenden Fluid zu sehen. Die kreisförmigen Kurven

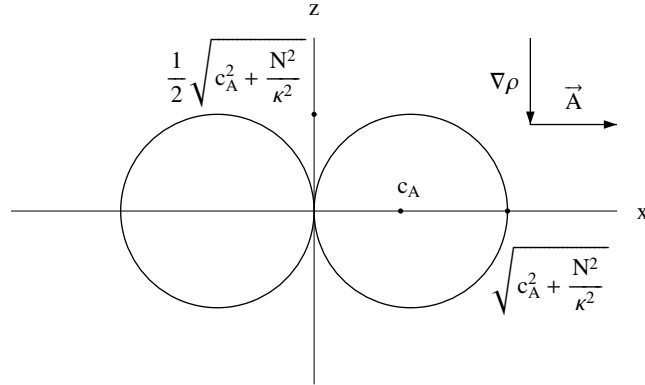


Abbildung 4.2: Polardiagramm der Phasengeschwindigkeiten $\frac{\omega_{\pm}}{\kappa} = \pm \cos(\gamma) \sqrt{\frac{N^2}{\kappa^2} + c_A^2}$ mit $N^2 > 0$ und $c_A^2 = \frac{A^2}{\mu\rho_0^*}$.

geben den Betrag der Phasengeschwindigkeit einer Welle je nach Winkel γ zwischen Wellenvektor \vec{k} und x -Achse an. Im Vergleich mit dem Friedrichsdiagramm

der kompressiblen Magnetohydrodynamik (4.1) fehlen die magneto-akustischen Wellentypen. Im Polardiagramm sieht man die Anisotropie der Wellenausbreitung besonders deutlich. Für Wellen, deren Wellenvektoren exakt in z -Richtung, also in die Richtung des Massendichtegradienten zeigen, verschwindet die Phasengeschwindigkeit. Es findet in diese Richtung keine Ausbreitung statt.

Die Phasengeschwindigkeiten von ebenen Wellen in einem stabil geschichteten Medium sind größer als die der normalen Alfvénwellen c_A , aber abhängig vom Betrag des Wellenvektors κ . Der Massendichtegradient macht die Wellenausbreitung dispersiv, die Phasengeschwindigkeit ist umso größer, je größer die Wellenlänge ist. Im Kurzwellenlimes erhält man die Alfvénwellen zurück, im Friedrichsdiagramm liegt der Schnittpunkt der Kreise mit der x -Achse dann bei c_A . Im Langwellenlimes geht die Phasengeschwindigkeit gegen unendlich, also auch der Radius der Kreise im Friedrichsdiagramm.

In einem instabil geschichteten Medium ist $N^2 < 0$ und die Phasengeschwindigkeit der Wellen ist kleiner als die Alfvéngeschwindigkeit. Für lange Wellen wird $\frac{\omega_{\pm}}{\kappa}$ imaginär, die Welle ist instabil. In der Abbildung (4.3) sind die Kreiskurven der Boussinesq-Alfvénwellen nun kleiner als die der Alfvénwellen: Für den

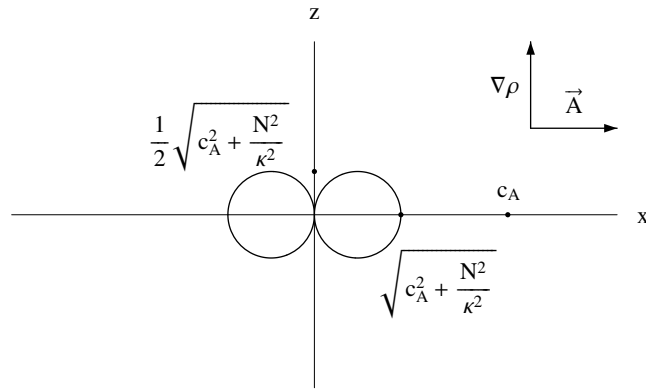


Abbildung 4.3: Polardiagramm der Phasengeschwindigkeiten $\frac{\omega_{\pm}}{\kappa}$ mit $N^2 < 0$.

kritischen Wert κ_{min} aus (4.15) schrumpfen die Kreiskurven auf den Ursprung zusammen.

Der wesentliche Unterschied zwischen einer klassischen Alfvénwelle und einer Boussinesq-Alfvénwelle wird im Polardiagramm der z -Komponente der Gruppengeschwindigkeit deutlich:

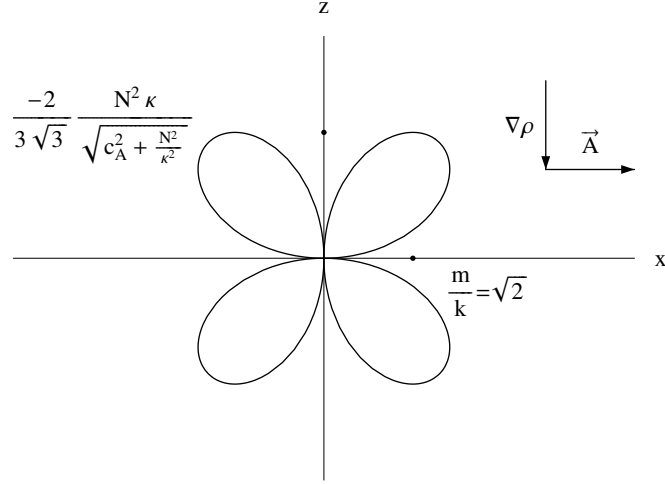


Abbildung 4.4: Polardiagramm der z -Komponente der Gruppengeschwindigkeit $\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial m}$ der Boussinesq-Alfvénwellen

In Abbildung (4.4) ist

$$\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial m} = \frac{-km \frac{N^2}{\kappa^4}}{\pm \sqrt{\frac{A_0^2}{\mu \rho_0^*} + \frac{N^2}{\kappa^2}}} = -\cos(\gamma) \sin(\gamma) \frac{\frac{N^2}{\kappa^2}}{\pm \sqrt{\frac{A_0^2}{\mu \rho_0^*} + \frac{N^2}{\kappa^2}}} \quad (4.17)$$

für die Lösungen (4.13) in einem Polardiagramm dargestellt. Die Gruppengeschwindigkeit in z -Richtung ist abhängig von der Lage des Wellenvektors \vec{k} . Zeigt der Wellenvektor in x - oder z -Richtung, wird keine Energie senkrecht zur Trennfläche abgestrahlt. Für ein Verhältnis der Wellenzahlkomponenten $\frac{m}{k} = \sqrt{2}$ ist $\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial m}$ bei gegebenem κ maximal und beträgt

$$\left(\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial m} \right)_{max} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{\frac{N^2}{\kappa^2}}{\pm \sqrt{\frac{A_0^2}{\mu \rho_0^*} + \frac{N^2}{\kappa^2}}}. \quad (4.18)$$

Die Gruppengeschwindigkeit steht allerdings nicht mehr senkrecht auf dem Wellenvektor, wie dies für die reinen Schwerewellen der Fall ist (4.12). Das Skalarprodukt ergibt einen Anteil aus der Alfvéngeschwindigkeit:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} \right) \cdot \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \frac{\frac{A^2}{\mu \rho_0^*}}{\sqrt{\frac{A^2}{\mu \rho_0^*} + \frac{N^2}{\kappa^2}}}. \quad (4.19)$$

Für dichtebeständige Fluide ohne Massendichtegradienten ist $N^2 = 0$ und es gibt überhaupt keine Energieabstrahlung in z -Richtung. Dann liegen klassische Alfvénwellen vor, die sich nur in Richtung der Magnetfeldlinien ausbreiten

können (3.39). Diese sind für die Stabilitätsanalyse von keiner Bedeutung. Die Boussinesq-Alfvénwellen dagegen schon. Sie treten anstelle der Laplace-Lösungen. Ein starkes Magnetfeld versucht die Energieabstrahlung senkrecht zu den Magnetfeldlinien und damit auch senkrecht zur Trennfläche zu unterdrücken. Je größer die Alfvéngeschwindigkeit ist, desto kleiner ist die Gruppengeschwindigkeit in z -Richtung. Für verschwindendes Magnetfeld erhält man die Formel für Schwerewellen (4.12) zurück.

Die Dispersionsrelation (4.8) erlaubt wie im Fall der Schwerewellen zusätzlich exponentiell abklingende oder zunehmende Lösungen. Bei der Stabilitätsanalyse des Kelvin-Helmholtz-Problems wird die Auslenkung der Trennfläche durch eine ebene Welle $\propto e^{i(kx-\omega t)}$ bei $z = 0$ vorgegeben. Die Wellenzahlkomponente in z -Richtung der Wellen in den Teilströmungen ist dann durch die Dispersionsrelation

$$m = \pm k \sqrt{\frac{N^2}{(-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu\rho_0^*}k^2} - 1} \quad (4.20)$$

gegeben, wobei man für die jeweilige Teilströmung die entsprechenden Werte für Geschwindigkeit, Brunt-Väisälä-Frequenz, Permeabilität und Massendichte einsetzt. Eine Welle mit reellem ω und k besitzt dann eine imaginäre Wellenzahl m , wenn das Quadrat der Brunt-Väisälä-Frequenz kleiner ist als die durch den Alfvénwellenoperator gegebene Abweichung von ω :

$$N^2 < (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu\rho_0^*}k^2. \quad (4.21)$$

Der erste Term unter der Wurzel stellt ein Verhältnis zweier Frequenzen im Quadrat dar. Im Nenner steht die Dispersionsrelation einer freien Alfvénwelle. Bewegt sich die Welle durch das geschichtete Medium mit einer Geschwindigkeit, die stark von der Alfvéngeschwindigkeit abweicht und sehr viel größer ist als N/k , dann ist das gesamte Verhältnis gegenüber -1 sehr klein. m ist dann imaginär und lautet näherungsweise:

$$m \approx \pm ik \left(1 - \frac{1}{2} \frac{N^2}{(-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu\rho_0^*}k^2} + \dots \right). \quad (4.22)$$

Im Grenzfall verschwindender Brunt-Väisälä-Frequenz ergeben sich die Laplace-Lösungen mit $m = \pm ik$.

Boussinesq-Alfvénwellen in der Ionosphäre

Das Modell der Kelvin-Helmholtz-Instabilität kompressibler Fluide wird für Stabilitätsuntersuchungen der Magnetopause verwendet, wo der Sonnenwind mit dem Erdmagnetfeld eine Trennfläche bilden [74], [65], [68]. Für das Modell der Kelvin-Helmholtz-Instabilität der Boussinesq-Alfvénwellen muss neben dem Magnetfeld eine exponentiell ansteigende oder abklingende Dichteschichtung positiv und negativ geladener Teilchen vorliegen, wie sie zum Beispiel in der Ionosphäre der Erde vorliegen kann [21].

Durch extraterrestrische Strahlung und Teilchenbeschuss - zu einem großen Anteil von der Sonne - werden die Luftmoleküle der Atmosphäre ionisiert. Die Ionosphäre bezeichnet einen raum-zeitlich variablen Bereich der Atmosphäre, der sich im Tagesablauf ständig ändert. Sie unterliegt mehreren Einflüssen wie der geographischen Breite und Tag- und Nachtzyklen und Jahreszeiten. Die Ionosphäre ist kein vollständig ionisiertes Fluid, den Hauptbestandteil der Luft bilden neutrale Teilchen wie Stickstoff und Sauerstoff und die aus diesen Elementen gebildeten Moleküle. Die Zusammensetzung ist stark von der Höhe über der Erdoberfläche abhängig [35].

Die Ionisation der Luft beginnt etwa in einer Höhe von 80km. In der sogenannten F-Schicht in ungefähr 200km Höhe ist die Konzentration der freien Elektronen und ionisierten Moleküle am höchsten und die Anzahldichten der geladenen Teilchen betragen bis zu $\frac{10^6}{\text{cm}^3}$. Oberhalb der F-Schicht verringern sich die Anzahldichten wieder [32]. Es liegen also bezüglich der elektrisch geladenen Teilchen positive und negative Massendichtegradienten vor.

Auch die Temperatur nimmt im gesamten Verlauf der Atmosphäre unterschiedliche Werte an und ist stark vom Tag- und Nachtzyklus abhängig. Während der Sonneneinstrahlung auf der Tagseite steigt die Temperatur ab einer Höhe von 100km von 200 K auf bis zu 2000 K in einer Höhe von 400 km an. Auf der Nachtseite der Erde ohne Sonneneinstrahlung gleichen sich die Temperaturen an und man kann ab einer Höhe von 150km Höhe von einer isothermen Dichteschichtung sprechen.

Niederfrequente Wellenphänomene der unteren Ionosphäre werden in einer Arbeit von Karplus [35] diskutiert. Aufgrund des geringen Drucks auf die Materie werden die hydrostatischen Kräfte und die Schwerkraft gegenüber den elektromagnetischen Kräften vernachlässigt. Damit entfällt auch die thermodynamische Zustandsgleichung. Für bestimmte Bereiche der Ionosphäre erhält Karplus in der Tat die Alfvénwellen. In diesem Fall muss

$$\frac{\nu_{in}}{\omega_i} \ll \frac{\nu_{in}}{\omega} \ll 1 \quad (4.23)$$

gelten. Mit ν_{in} wird die Stoßfrequenz der Ionen mit neutralen Teilchen und mit ω_i die Zyklotronfrequenz der Ionen bezeichnet. Goldston und Rutherford [30] geben die Stärke des Erdmagnetfelds in der Ionosphäre im Durchschnitt mit $3 \cdot 10^{-5} T$ an. Die Teilchendichte der Ionosphäre wird im gleichen Buch mit $10^{11} \frac{1}{\text{m}^3}$ angegeben. Damit wird der dimensionslose Parameter

$$\frac{\epsilon_0 \mu_0 B^2}{\mu_0 \rho_i} = \frac{c_A^2}{c^2} = \frac{8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} 9 \cdot 10^{-10} \frac{\text{V}^2 \text{s}^2}{\text{m}^4}}{15,5 \cdot \frac{10^{11}}{6,022 \cdot 10^{23}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 31 \cdot 10^{-10} \ll 1. \quad (4.24)$$

mit der Ionenmassendichte ρ_i , des arithmetischen Mittels der Masse von Stickstoff und Sauerstoff. Der Parameter ist sehr viel kleiner eins, so dass die Nie-

der Frequenzapproximation gut erfüllt ist. Strömungen in der Ionosphäre der Erde können mit der Magnetohydrodynamik in der Boussinesq-Näherung beschrieben werden.

4.2 Lineare Stabilitätsanalyse

Entsprechend der Analyse der Kelvin-Helmholtz-Instabilität dichtebeständiger Fluide wird das Verhalten des Systems auf eine Auslenkung der Trennfläche untersucht. Der Grundzustand der Strömung muss die Feldgleichungen in den beiden Teilströmungen und die Übergangsbedingungen an der Trennfläche, die in Kapitel 2 hergeleitet worden sind, erfüllen. Die durch die Massendichtegradienten verursachte Druckverteilung erzeugt zusätzliche Beiträge in der dynamischen Übergangsbedingung (A.38). Ansonsten können die Übergangsbedingungen der inkompressiblen Kelvin-Helmholtz-Instabilität verwendet werden. Im Grundzustand dürfen keine Magnetfelder und Geschwindigkeiten in z -Richtung vorgegeben werden.

Es wird ein zweidimensionales Strömungssystem, wie in Abbildung (4.5) skizziert, analysiert.

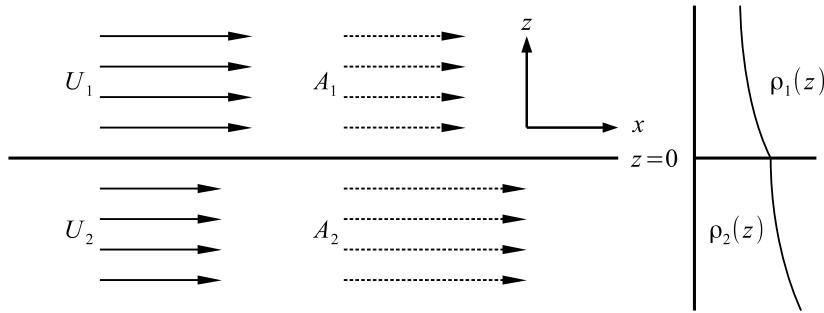


Abbildung 4.5: Zweidimensionale Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Fluiden in Boussinesq-Näherung, deren Massendichten $\rho_1(z)$ und $\rho_2(z)$ Funktionen der Höhe z sind.

Eine ausgelenkte Trennfläche $s_1(x, t)$ geht mit Wellenbewegungen in beiden Teilströmungen einher. Über die kinematische Übergangsbedingung für zwei Raumdimensionen

$$\dot{s}_1 + U_1 s_{1x} = w_1^{(1)}, \quad (4.25)$$

$$\dot{s}_1 + U_2 s_{1x} = w_1^{(2)} \quad (4.26)$$

ist die Auslenkung

$$s_1 = S_1 e^{i(kx - \omega t)} + c.c. \quad (4.27)$$

mit den Feldern in beiden Teilströmungen verknüpft. Die Phase wird mit

$$\varphi = kx - \omega t \quad (4.28)$$

abgekürzt. Die Felder können dann über die Feldgleichungen (4.2) bis (4.4) berechnet werden und lauten beispielsweise für die obere Teilströmung:

$$u_1^{(1)} = i(-\omega + U_1 k) \frac{m_1}{k} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.29)$$

$$w_1^{(1)} = i(-\omega + U_1 k) S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.30)$$

$$a_1^{(1)} = (A_1 k) \frac{m_1}{k} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.31)$$

$$c_1^{(1)} = (A_1 k) S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.32)$$

$$p_1^{(1)} = -\rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 \frac{m_1}{k^2} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.33)$$

$$\tilde{\rho}_1^{(1)} = \frac{\rho_1}{g} N_1^2 S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (4.34)$$

$$\vec{j}_1^{(1)} = \nabla \times \vec{b}_1^{(1)} = A_1 (k^2 + m_1^2) S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \vec{e}_y + c.c. . \quad (4.35)$$

Die als konstant angenommenen Massendichten ρ_0^* der beiden Teilströmungen werden ab sofort mit ρ_1 bzw. ρ_2 bezeichnet. Die Felder der zweiten Teilströmung erhält man, indem man die entsprechenden physikalischen Größen der Strömung und $-m_1$ durch m_2 ersetzt. Im Vergleich mit den Feldern der dichtebeständigen Fluide verursacht die Auslenkung der Trennfläche eine Dichteschwankung $\tilde{\rho}_1$. Das Geschwindigkeits- und Magnetfeld sind nicht mehr drehungsfrei. Es existiert eine elektrische Stromdichte \vec{j}_1 in y -Richtung. Der Druck p_1 und die x -Komponente des Magnetfelds a_1 sind proportional zur Wellenzahl m . In diesem Modell wird die Oberflächenspannung vernachlässigt. Die dynamische Übergangsbedingung erster Ordnung

$$\|p_1 + \frac{A}{\mu} a_1\| = g \|\rho\| s_1 \quad (4.36)$$

führt dann auf eine Gleichung, mit der man $\omega(k)$ bestimmt:

$$F_{B_T} = i \frac{m_1}{k^2} \left\{ \rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A_1^2}{\mu_1} k^2 \right\} + i \frac{m_2}{k^2} \left\{ \rho_2 (-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A_2^2}{\mu_2} k^2 \right\} - g (\rho_2 - \rho_1) = 0. \quad (4.37)$$

Diese Gleichung wurde bereits von Acheson [1] aufgestellt und deren Stabilität für $m_1 = m_2$ ohne Dichtesprung untersucht. Ersetzt man die Wellenzahlkomponenten m durch die Dispersionsrelationen der freien Wellen (4.20), erhält man eine Gleichung für ω mit komplexen Koeffizienten. Setzt man die Dichten an der Trennfläche bei $z = 0$ gleich, das heißt $\rho_1 = \rho_2$, so verschwindet die rechte Seite und die Bestimmungsgleichung für $\omega(k)$ besitzt nur noch reelle Koeffizienten. Das ist eine erhebliche Vereinfachung. Eine im Modell betrachtete Oberflächenspannung hätte den gleichen mathematischen Effekt zur Folge wie der Dichtesprung.

Eine Massendichtedifferenz an der Trennfläche zieht physikalische Konsequenzen mit sich. Ersetzt man in der Gleichung (4.37) die Terme in den geschweiften Klammern mit Hilfe der jeweiligen Dispersionsrelationen der Strömungen (4.8),

erhält man eine Gleichung, die neben Materialgrößen nur noch Wellenzahlkomponenten enthält:

$$m_1 \rho_1 \frac{N_1^2}{k^2 + m_1^2} + m_2 \rho_2 \frac{N_2^2}{k^2 + m_2^2} = ig(\rho_1 - \rho_2). \quad (4.38)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass von der Trennfläche ausgehende Wellen mit reellen Wellenzahlkomponenten m_1 und m_2 diese Gleichung nicht lösen. Ein Dichtesprung auf der Trennfläche erzwingt eine exponentiell abklingende Lösung oder eine Kombination aus ebener Welle und abklingender Lösung bei Instabilität in mindestens einer der beiden Teilströmungen.

Die gleiche Argumentation gilt auch für Systeme ohne Dichtesprung. Die Gleichung (4.38) vereinfacht sich dann auf:

$$N_1^2 \frac{m_1}{k^2 + m_1^2} + N_2^2 \frac{m_2}{k^2 + m_2^2} = 0. \quad (4.39)$$

Liegt lineare Stabilität vor, sind alle erlaubten ω reell. Die Dispersionsrelationen (4.20) für die freien Wellen fordern dann entweder rein reelle oder rein imaginäre Wellenzahlkomponenten m_1 und m_2 . Die obere Gleichung kann aber nur erfüllt werden, wenn m_1 und m_2 beide reell oder beide imaginär sind. Von einer stabilen Trennfläche ohne Dichtesprung werden also entweder in beide Strömungen Wellen abgestrahlt oder aber es gehen abklingende Funktionen zu beiden Seiten ab.

Für von der Trennfläche abgestrahlte Wellen legt die Gleichung die Richtung der abgestrahlten Wellen fest. Der Winkel γ ist der Winkel zwischen Wellenvektor und unausgelenkter Trennfläche bei $z = 0$:

$$\frac{m}{k} = \tan(\gamma). \quad (4.40)$$

Dann legen die Brunt-Väisälä Frequenzen der Teilströmungen die Winkel der abgestrahlten Wellen gemäß

$$N_1^2 \frac{\tan(\gamma_1)}{1 + \tan(\gamma_1)^2} + N_2^2 \frac{\tan(\gamma_2)}{1 + \tan(\gamma_2)^2} = 0 \quad (4.41)$$

fest.

Kleine Brunt-Väisälä-Frequenzen und großer Dichtesprung

Für kleine Brunt-Väisälä-Frequenzen kann man die Näherung für die Wellenzahlkomponenten m aus (4.22) verwenden. In diesem Fall sind die Störungen der Teilströmungen exponentiell abklingende Funktionen wie auch beim klassischen Kelvin-Helmholtz-Problem dichtebeständiger Fluide. Die Dispersionsrelation (4.37) ist dann auch bei einem Dichtesprung an der Trennfläche eine Gleichung $\omega(k)$ mit reellen Koeffizienten.

Die dynamische Übergangsbedingung in erster Ordnung liefert in dieser Näherung eine Gleichung zweiter Ordnung in ω :

$$||\rho(-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu}k^2 - \frac{1}{2}\rho N^2|| = gk||\rho||. \quad (4.42)$$

Die Lösungen lauten:

$$\omega_{\pm} = \frac{U_1 \rho_1 + U_2 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} k \pm \left\{ -\frac{(U_1 - U_2)^2 \rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} k^2 + \frac{\frac{A_1^2}{\mu_1} + \frac{A_2^2}{\mu_2}}{\rho_1 + \rho_2} k^2 + \frac{N_1^2 \rho_1 + N_2^2 \rho_2}{2(\rho_1 + \rho_2)} + \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2} k \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.43)$$

Die Terme aus der Geschwindigkeitsdifferenz, des Magnetfeldes und der Schwerkraft sind bereits aus der Betrachtung des klassischen Kelvin-Helmholtz-Problems (3.62) bekannt. Neu ist der dritte Term unter der Wurzel. Die Quadrate der Brunt-Väisälä-Frequenzen werden mit den jeweiligen Grenzwert der Dichten bei $z = 0$ gewichtet und gehen in der Summe in den Radikanten ein:

$$\frac{N_1^2 \rho_1 + N_2^2 \rho_2}{2(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (4.44)$$

Sind beide Schichtungen stabil, bewirkt das auch einen stabilisierenden Effekt auf das Kelvin-Helmholtz-Problem. Sind beide Schichtungen instabil, liefern das einen destabilisierenden Beitrag, der für ein bestimmtes k die Wellenausbreitung in jeder Konfiguration instabil macht. Eine für sich instabil geschichtete Strömung kann Bestandteil eines stabilen Kelvin-Helmholtz-Problem werden. Das ist dann der Fall, wenn die andere Teilströmung den Effekt in der Summe (4.44) kompensiert. Die Neutralitätskurve ist durch

$$(U_1 - U_2)^2 = \frac{A_1^2}{\mu_1 \rho_1} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_2} + \frac{A_2^2}{\mu_2 \rho_2} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} + \left(\frac{1}{2} N_1^2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} N_2^2 \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2} + g(\rho_2 - \rho_1) \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{\rho_1 \rho_2} \frac{1}{k} \quad (4.45)$$

gegeben. Ist $\rho_1 > \rho_2$ wirkt die Schwerkraft destabilisierend. Im klassischen Kelvin-Helmholtz-Problem gibt es dann keinen Effekt, der für ausreichend kleine k den destabilisierenden Effekt ausgleichen kann. Hier kann eine stabile Schichtung den Beitrag durch die Schwerkraft kompensieren und die Strömung stabilisieren. Für große k stabilisieren die Magnetfelder den Effekt der Schwerkraft.

Lineare Stabilitätsanalyse ohne Dichtesprung an der Trennfläche

Gibt es an der Trennfläche keinen Dichtesprung $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, vereinfacht sich Gleichung (4.37) auf:

$$m_1 \left\{ (-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A_1^2}{\mu_1 \rho_0} k^2 \right\} = -m_2 \left\{ (-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A_2^2}{\mu_2 \rho_0} k^2 \right\}. \quad (4.46)$$

Einsetzen der Dispersionsrelationen für die Wellenzahlkomponenten m_1 und m_2 und anschließendes Quadrieren ergibt eine Gleichung dritten Grades in ω :

$$\begin{aligned} \omega^3 \{4||U||k\} + \omega^2 \{ -6||U^2||k^2 + 2||c_A^2||k^2 + ||N^2|| \} \\ + \omega \{ 4||U^3||k^3 - 4||U c_A^2||k^3 - 2||U N^2||k \} \\ - ||U^4||k^4 + 2||U^2 c_A^2||k^4 + ||U^2 N^2||k^2 - ||c_A^4||k^4 - ||N^2 c_A^2||k^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Differenzen zwischen den physikalischen Größen der Teilströmungen wurden mit Sprungklammern geschrieben. Die Gleichung dritter Ordnung vereinfacht sich wesentlich, wenn man ein Koordinatensystem wählt, welches sich mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(U_1 + U_2)$ in Strömungsrichtung bewegt. In diesem Koordinatensystem fließt die obere Strömung mit $U'_1 = \frac{1}{2}(U_1 - U_2)$ und die untere mit $U'_2 = -\frac{1}{2}(U_1 - U_2)$. Mit dieser Vereinbarung verschwinden alle Terme proportional zu $||U^2||$ und $||U^4||$.

Wir wollen einfache Spezialfälle der Gleichung (4.47) untersuchen. Beide Strömungen sollen durch das gleiche magnetische Induktionsfeld durchdrungen sein und die gleiche Permeabilität μ aufweisen. In diesem Fall verschwinden die Terme proportional zu $||c_A^2||$ und $||c_A^4||$. Die Brunt-Väisälä-Frequenzen der beiden Parallelströmungen sollen den gleichen Betrag besitzen. Damit ergeben sich zwei Spezialfälle. Im ersten Fall sind beide Strömungen stabil oder instabil geschichtet. Im zweiten Fall grenzt eine stabile an eine instabil geschichtete Strömung. Mit der vereinfachten Bezeichnung $U'_2 = -U'_1 = U'$, ergibt sich für zwei stabile oder instabile Schichtungen die Gleichung:

$$8U'k\omega'^3 + (8U'^3k^3 - 8U'kc_A^2k^2 - 4U'kN^2)\omega' = 0. \quad (4.48)$$

Nach der Division durch $8U'k$ ergibt sich:

$$\omega'^3 + \left(U'^2k^2 - c_A^2k^2 - \frac{1}{2}N^2\right)\omega' = 0 \quad (4.49)$$

mit den drei Lösungen:

$$\omega'_1 = 0 \quad (4.50)$$

$$\omega'_{2,3} = \pm \sqrt{-U'^2k^2 + c_A^2k^2 + \frac{1}{2}N^2}. \quad (4.51)$$

Die Rücktransformation auf das ruhende Koordinatensystem ergibt:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)k, \quad (4.52)$$

$$\omega_{2,3} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)k \pm \frac{1}{2}\sqrt{-(U_1 - U_2)^2k^2 + 4c_A^2k^2 + 2N^2}. \quad (4.53)$$

In einem stabilen System ist das Magnetfeld stark genug um die Geschwindigkeitsdifferenz der Strömungen zu kompensieren. Es gilt $4c_A^2 > (U_1 - U_2)^2$ und $N^2 > 0$. Dann besitzen die Lösungen $\omega_{2,3}$ nur Realteile. In Abbildung (4.6) sieht man, dass die Lösungen ω_2 und ω_3 symmetrisch um ω_1 liegen und die Ordinate bei $\pm\sqrt{\frac{N^2}{2}}$ schneiden. Die erhaltenen Lösungen müssen die unquadratisierte dynamische Übergangsbedingung (4.46) und zusätzliche Randbedingungen im Unendlichen für $z = \pm\infty$ erfüllen. Entweder muss die Wellenbewegung senkrecht zur Trennfläche exponentiell abklingen oder es muss für Wellenabstrahlung sichergestellt sein, dass der Energietransport von der Trennfläche weg in die Teilströmungen hinein abläuft. Es wird sich zeigen, dass die erhaltenen Lösungen für $|k| < |k_p|$ mit k_p aus (4.134) das nicht tun. Nur die Lösungen für $|k| > |k_p|$ sind gültig.

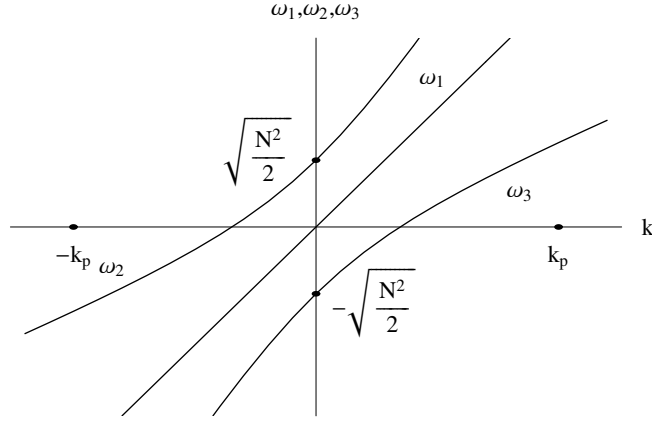


Abbildung 4.6: Die Lösungen $\omega_{1,2,3}(k)$ in einer stabilen Strömung. Für $|k| < |k_p|$ kann die Kausalitätsbedingung nicht erfüllt werden.

Macht man das Quadrat der Brunt-Väisälä-Frequenz N^2 immer kleiner, wandern die Schnittpunkte der ω_2 - und ω_3 -Kurven auf den Ursprung zu. Bei verschwindendem N^2 sind ω_2 und ω_3 Geraden durch den Ursprung.

Bei den nächsten beiden Beispielen sind die Wellenzahlen m im allgemeinen komplexe Größen, die die Bedingung (4.46) und die Kausalitätsbedingung oder Beschränktheitsbedingung erfüllen müssen. Ob für das Stabilitätsproblem physikalisch sinnvolle Lösungen vorliegen, muss im Einzelnen überprüft werden. Sind die beiden Strömungen instabil geschichtet, gibt es eine Wellenzahl k_B , die den stabilen vom instabilen Bereich trennt:

$$k_B^2 = \frac{-2N^2}{-(U_1 - U_2)^2 + 4c_A^2}. \quad (4.54)$$

Dieser Wert ist in den folgenden Abbildungen als Punkt auf der k -Achse dargestellt.

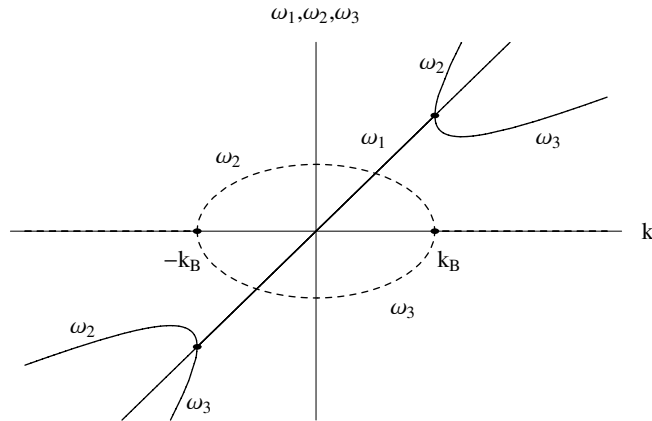


Abbildung 4.7: Real- und Imaginärteile der Lösungen $\omega_{1,2,3}(k)$ für $4c_A^2 > (U_1 - U_2)^2$ und instabiler Schichtung $N^2 < 0$.

Die Instabilität macht sich als geschlossene Kurve um den Ursprung bemerkbar. Das sind die Imaginärteile der Lösungen ω_2 und ω_3 . Die Realteile von ω_2 und ω_3 bilden die parabelähnlichen Kurven links unten und rechts oben. Sie enden bei $\pm k_B$ auf der Geraden ω_1 . Für größeres N^2 wird k_B größer und die gestrichelte Kurve wächst.

Eine dritte Möglichkeit der Instabilität ergibt sich, wenn das Magnetfeld nicht stark genug ist, die Geschwindigkeitsdifferenz der Parallelströmungen zu kompensieren und beide Strömungen stabil geschichtet sind.

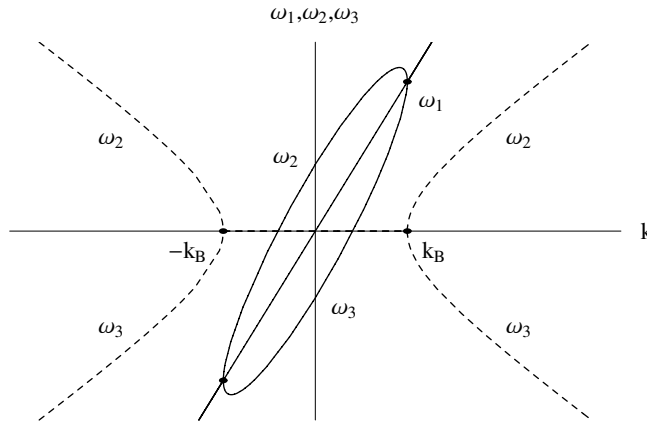


Abbildung 4.8: Real- und Imaginärteile der Lösungen $\omega_{1,2,3}(k)$ für $4c_A^2 < (U_1 - U_2)^2$ und stabiler Schichtung $N^2 > 0$.

Es wird nun ein Bereich $|k| < |k_B|$ stabilisiert. Die geschlossene Kurve um den Ursprung wird durch die Realteile der Lösungen $\omega_{2,3}$ gebildet. Die Imaginärteile bilden die parabelähnlichen Kurven links und rechts der ω -Achse. Die Realteile der Lösungen $\omega_{2,3}$ beginnen und enden bei $\pm k_B$ in einem Schnittpunkt mit der Lösung ω_1 . Die Imaginärteile beginnen auf der k -Achse.

Für stabile Schichtungen mit $N^2 > 0$, bei der die Lösungen für alle k stabil bleiben können, kann man eine Neutralitätskurve zeichnen. Diese Kurve bildet die Stabilitätsgrenze zwischen dem stabilen und instabilen Bereich.

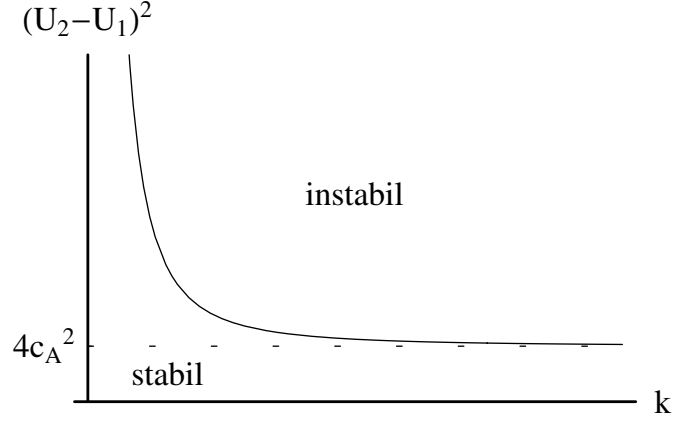


Abbildung 4.9: Neutralitätskurve der Kelvin-Helmholtz-Instabilität für Fluide in Boussinesq-Näherung mit gleichen konstanten Brunt-Väisälä-Frequenzen $N^2 > 0$ und Alfvéngeschwindigkeiten \bar{c}_A .

Für große k ist der Effekt durch die Schichtungen vernachlässigbar, dann wird die Stabilität allein durch die Stärke der Magnetfelder bestimmt und zwar unabhängig von k . Für kleine k stabilisiert die Schichtung die Strömungen. Im Vergleich mit Abbildung (3.2) fehlt ohne Oberflächenspannung ein für große k stabilisierender Effekt und so ist die Neutralitätskurve monoton fallend. Sinnvolle physikalische Lösungen liegen vor, wenn die dynamische Übergangsbedingung und die Kasualitätsbedingung oder Beschränktheitsbedingung zusammen erfüllt werden können.

Entgegengesetzte Massendichtegradienten

Für Strömungen, die mit $N_1^2 = -N_2^2 = N^2$ genau entgegengesetzt geschichtet sind, vereinfacht sich das Polynom dritten Grades (4.47) wie folgt:

$$8U'k\omega^3 - 2N^2\omega^2 + 8(U'^3 - c_A^2 U')k^3\omega - 2N^2(U'^2 - c_A^2)k^2 = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, dass $\omega_1 = \frac{N^2}{4U'k}$ eine Lösung ist. Die anderen beiden Lösungen sind durch

$$\omega_{2,3} = \pm k \sqrt{c_A^2 - U'^2} \quad (4.55)$$

gegeben. Die Rücktransformation auf das ruhende Koordinatensystem ergibt:

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)k + \frac{1}{2} \frac{N^2}{(U_1 - U_2)k}, \quad (4.56)$$

$$\omega_{2,3} = \frac{1}{2}(U_1 + U_2)k + \frac{1}{2} \sqrt{-(U_1 - U_2)^2 k^2 + 4c_A^2 k^2}. \quad (4.57)$$

Wie man sieht, sind für ausreichend starke Magnetfelder $c_A^2 > \frac{1}{4}(U_1 - U_2)^2$ alle

ω reell. Das System aus einer stabil und instabil geschichteten Teilströmung ist dann stabil. Eine Erklärung dafür liegt in der Inkompressibilität beider Fluide. In der instabil geschichteten Strömung neigt sich ein Flüssigkeitsteilchen dazu, sich bei einer kleinen Störung immer weiter vertikal nach unten zu bewegen. Diese kleine Auslenkung wirkt über die gesamte Flüssigkeitsäule unter und über dem Flüssigkeitsteilchen bis in die zweite Strömung hinein. Dort in der stabil geschichteten Strömung erfährt die Auslenkung die gleichstarke, aber entgegengesetzte Kraft, die den Auftrieb der instabil geschichteten Strömung bei gleichem Betrag des Massendichtegradienten kompensiert. Deshalb spielt die Brunt-Väisälä-Frequenz in den Lösungen $\omega_{2,3}$ keine Rolle. Die Auftriebskräfte der beiden Teilströmungen kompensieren sich. Die Stärke der Magnetfelder und die Differenzgeschwindigkeit entscheiden über die Stabilität des Systems.

Übergangsbedingungen an das elektromagnetische Feld

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion geht stetig durch die Wirbelschicht:

$$(-A_2 - A_1) s_{1x} + b_1^{(2)} - b_1^{(1)} = 0. \quad (4.58)$$

Die Tangentialkomponente des Magnetfeldes ist mit einem Oberflächenstrom in der Wirbelschicht verknüpft. Es gilt:

$$\vec{j}_T = \vec{e}_y \left| \frac{a_2}{\mu_2} - \frac{a_1}{\mu_1} \right|_{z=0} = i \frac{A_1 \mu_1 m_1 - A_2 \mu_2 m_2}{\mu_1 \mu_2} (S_1 e^{i\varphi} - S_1^* e^{-i\varphi}) \vec{e}_y. \quad (4.59)$$

Das induzierte elektrische Feld besitzt bei zwei Raumrichtungen nur eine Komponente in der dritten Raumrichtung. Die Normalkomponente des elektrischen Feldes wäre mit einer Oberflächenladung verknüpft. Diese entfällt hier. Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes muss stetig durch eine Grenzfläche gehen:

$$U_2 b_1^{(2)} - A_2 b_1^{(2)} - (U_1 b_1^{(1)} - A_1 b_1^{(1)}) - \dot{s} (A_1 - A_2) = 0. \quad (4.60)$$

Diese Bedingung ist erfüllt.

4.3 Störungstheorie zweiter Ordnung

In der Störungstheorie erster Ordnung gewinnt man die Dispersionsrelation der Trennflächenwellen F_{B_T} (4.37), indem man die Dispersionsrelationen der freien Wellen der Teilströmungen F_B (4.8) in die dynamische Übergangsbedingung einsetzt. Um in der Störungstheorie zweiter Ordnung die Evolutionsgleichung für die Trennflächenwellen aufzustellen, muss man entsprechend die Evolutionsgleichungen der Teilströmungen mit der dynamischen Übergangsbedingung verknüpfen.

In jeder Teilströmung wird eine Gleichung für die Amplitude hergeleitet. Auf einer Zeit- und Ortsskala T_1 bzw. X_1, Z_1 breitet sich eine Störung mit der Gruppengeschwindigkeit $\frac{\partial \omega}{\partial k}, \frac{\partial \omega}{\partial m}$ aus. Die Richtung der Ausbreitung ist durch die Kenngrößen des Strömungsgebietes gegeben.

Für die Ausbreitung einer Störung auf der Wirbelschicht auf der Zeit- und Ortsskala T_1 bzw. X_1 wird durch die dynamische Übergangsbedingung eine dritte Gleichung bereitgestellt. Alle drei Evolutionsgleichungen müssen zusammen mit den Übergangsbedingungen an der Wirbelschicht erfüllt sein.

Die kinematische Übergangsbedingung (2.12) in zweiter Ordnung des Entwicklungsparameters ε lautet für eine Seite der Trennfläche:

$$(\partial_t + U\partial_x) s_2 - w_2 = - \left(\frac{\partial s_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) - u_1 s_{1x} + w_{1z} s_1. \quad (4.61)$$

Die quadratischen Terme der rechten Seite $u_1 s_{1x}$ und $s_1 w_{1z}$ stellen eine Wellenbewegung doppelter Frequenz und halber Wellenlänge dar. Für die Auslenkung in zweiter Ordnung s_2 wird deshalb ein Ansatz mit dieser Wellenbewegung mit noch unbekannter Amplitude S_2 gewählt:

$$s_2 = S_2 e^{2i(kx - \omega t)} + c.c. . \quad (4.62)$$

Damit ist w_2 auf einer Seite der Trennfläche bei $z = 0$ festgelegt:

$$w_2|_{z=0} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) e^{i(kx - \omega t)} + 2(-\omega + Uk) (kS_1^2 + iS_2) e^{2i(kx - \omega t)} + c.c. . \quad (4.63)$$

Die Funktion enthält neben der nichtlinearen Wellenbewegung $\propto e^{2i(kx - \omega t)}$ auch Terme proportional zur Grundwelle $\propto e^{i(kx - \omega t)}$, deren Koeffizienten durch Ableitungen der Amplitude nach den Koordinaten der ε^{-1} -Skala gegeben sind. Das Geschwindigkeitsfeld w_2 in der angrenzenden Teilströmung muss aus beiden Wellenbewegungen bestehen, damit im Grenzfall $\lim_{z \rightarrow 0}$ die kinematische Übergangsbedingung erfüllt werden kann. In der linearisierten Theorie führt eine Auslenkung der Trennfläche wie $e^{i(kx - \omega t)}$ zu einer Wellenabstrahlung proportional zu $e^{i(kx + mz - \omega t)}$ im Raum mit einer Wellenzahlkomponente m , die durch die Dispersionsrelation F_B (4.8) bestimmt wird. Entsprechendes gilt für eine Auslenkung der Trennfläche proportional zu $e^{2i(kx - \omega t)}$. Hier wird eine Wellenabstrahlung wie $e^{2i(kx - \omega t) + inz}$ mit einer Wellenzahlkomponente n , die ebenfalls durch F_B bestimmt wird, erwartet.

Die Feldgleichung für w_2 wird aus dem Gleichungssystem (1.60) bis (1.62) in zweiter Ordnung gewonnen. Es besteht aus den x - und z -Komponenten der Impulsbilanz und Induktionsgleichung, sowie der Kontinuitätsgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2 + U u_{2x} + \frac{1}{\rho_0^*} p_{2x} = & - \left(\frac{\partial u_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_1}{\partial X_1} \right) \\ & + \frac{c_1}{\mu \rho_0^*} (c_{1x} - a_{1z}) - u_1 u_{1x} - w_1 u_{1z}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 + U w_{2x} + \frac{1}{\rho_0^*} p_{2z} + \frac{A}{\mu \rho_0^*} (c_{2x} - a_{2z}) + \frac{g}{\rho_0} \tilde{p}_2 = & - \left(\frac{\partial w_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial w_1}{\partial Z_1} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_1}{\partial Z_1} \right) \\ & - \frac{A}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial c_1}{\partial X_1} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_1} \right) - \frac{a_1}{\mu \rho_0^*} (c_{1x} - a_{1z}) - u_1 w_{1x} - w_1 w_{1z}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\dot{a}_2 + U a_{2x} - A u_{2x} = - \left(\frac{\partial a_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial a_1}{\partial X_1} - A \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right) - u_1 a_{1x} - v_1 a_{1y} + a_1 u_{1x} + b_1 u_{1y}, \quad (4.66)$$

$$\dot{c}_2 + U c_{2x} - A w_{2x} = - \left(\frac{\partial c_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial a_1}{\partial X_1} - A \frac{\partial w_1}{\partial X_1} \right) - u_1 c_{1x} - w_1 c_{1y} + a_1 w_{1x} + c_1 w_{1y}, \quad (4.67)$$

$$\dot{\rho}_2 + U \tilde{\rho}_{2x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w_2 = - \left(\frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial X_1} \right) - u_1 \tilde{\rho}_{1x} - w_1 \tilde{\rho}_{1z}. \quad (4.68)$$

Die quadratischen Terme in der Induktionsgleichung und der Kontinuitätsgleichung heben sich gegenseitig auf. In den Impulsbilanzen überleben die quadratischen Terme des Magnetfelds. Bei der Umformung des Gleichungssystems auf eine Gleichung, die nur noch die Geschwindigkeitskomponenten w_1 und w_2 enthält, fallen auch die quadratischen Terme des Magnetfelds weg. Es ist bemerkenswert, dass sich das Gleichungssystem der Teilströmungen in einer linearen Gleichung in w_2 und w_1 äußert:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \Delta w_2 - N^2 w_{2xx} = \\ & - 2 \left\{ (\partial_t + U \partial_x) \left(\frac{\partial w_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial w_1}{\partial X_1} \right) - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \frac{\partial w_{1x}}{\partial X_1} \right\} \\ & - 2 \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \left(\frac{\partial w_{1x}}{\partial X_1} + \frac{\partial w_{1z}}{\partial Z_1} \right) - 2 N^2 \frac{\partial w_{1x}}{\partial X_1}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Tabaei und Akylas [76] haben eine lineare Gleichung in einer Theorie ohne Magnetfelder hergeleitet. Auf der rechten Seite befinden sich mit Ableitungen von w_1 nur Terme, die proportional zur Grundwelle $e^{i(kx+mz-\omega t)}$ sind. Auf der linken Seite sind mit w_2 Terme proportional zu $e^{i(kx+mz-\omega t)}$ und $e^{2i(kx-\omega t)+inz}$ vertreten. Für beide Wellenbewegungen muss die Gleichung erfüllt sein. Wenn man w_1 (4.30) einsetzt und die Ableitungen sortiert, kann man die rechte Seite der Gleichung mithilfe der Ableitungen der Dispersionsrelation F_B (4.8) vereinfacht darstellen:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \Delta w_2 - N^2 w_{2xx} = \\ & \left(- \frac{\partial F_B}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_B}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial F_B}{\partial m} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} \right) e^{i(kx+mz-\omega t)} + c.c.. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Der Wellenanteil $\propto e^{i(kx+mz-\omega t)}$ in w_2 erzeugt auf der linken Seite die Dispersionsrelation (4.8) aus der linearisierten Theorie. Die rechte Seite muss deshalb identisch verschwinden (Säkulärbedingung):

$$- \frac{\partial F_B}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_B}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial F_B}{\partial m} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} = 0. \quad (4.71)$$

Aus den Feldgleichungen gewinnt man eine Evolutionsgleichung für die Amplitude $S_1(X_1, Z_1, T_1)$, die für den Bereich der jeweiligen Teilströmung gilt. Für die neue Wellenbewegung $\propto e^{2i(kx-\omega t)+inz}$, die aus den quadratischen Termen der kinematischen Übergangsbedingungen resultiert, liefert die linke Seite die Dispersionsrelation:

$$4 \left((-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} k^2 \right) (4k^2 + n^2) - 4N^2 k^2 = 0. \quad (4.72)$$

Die involvierten Materialgrößen sowie k und ω entsprechen denen aus der Dispersionsrelation der Grundwelle (4.8). Im Vergleich mit (4.8) erhält man eine Relation zwischen den Wellenzahlkomponenten k, m und n :

$$n^2 = m^2 - 3k^2. \quad (4.73)$$

Das Quadrat der Wellenzahl n ist immer kleiner als m^2 . Liegt in erster Ordnung eine Wellenabstrahlung mit reellem m vor, dann ist n imaginär, wenn $|\frac{m}{k}| < \sqrt{3}$ ist. In zweiter Ordnung klingen die Lösungen dann exponentiell ab. Gibt es in erster Ordnung abklingende Lösungen mit m imaginär, dann fallen die Lösungen zweiter Ordnung noch schneller ab.

Für jede der Teilströmungen gilt aufgrund der unterschiedlichen Dispersionsrelationen (4.8) im allgemeinen eine Evolutionsgleichung (4.71) und eine Relation (4.73) mit den entsprechenden Halbraumdaten.

Bei der Berechnung der Felder zweiter Ordnung mithilfe von (4.64) bis (4.68) tritt bei der Dichteschwankung $\tilde{\rho}_2$ eine Besonderheit auf. Mit $\varphi = kx - \omega t$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_2 = & i \frac{\rho_0^*}{gk^2} \left(\frac{\partial F_B}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} - \frac{\partial F_B}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{\partial F_B}{\partial m} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} \right) e^{i\varphi} e^{imz} \\ & + \frac{1}{gk^2} \left\{ (4k^2 + n^2) \left(-\frac{A^2}{\mu} k^2 + \rho_0^* (-\omega + Uk)^2 \right) \right\} (S_2 - imS_1^2) e^{2i\varphi} e^{inz} + c.c. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Das Dichtefeld $\tilde{\rho}_2$ ist nur proportional zur nichtlinear erzeugten Welle mit doppelter Frequenz und halber Wellenlänge $e^{2i(kx - \omega t) + imz}$. Der Koeffizient der Grundwelle verschwindet mit (4.71).

Um die Amplitude S_2 zu bestimmen und die Evolutionsgleichungen der Teilströmungen miteinander zu verknüpfen, muss die dynamische Übergangsbedingung ausgewertet werden. Für die Komponenten der magnetischen Induktion a_2 und b_2 gilt eine Gleichung wie für w_2 . Der Druck p_2 wird bis auf eine Konstante aus den Impulsbilanzen bestimmt:

$$\begin{aligned} p_2 = & \frac{\rho_0^* (-\omega + Uk)}{k^3} \left\{ k (-\omega + Uk) \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} + 2m \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \omega \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) \right\} e^{i\varphi} e^{imz} \\ & - n\rho_0^* (-\omega + Uk)^2 (iS_2 + mS_1^2) e^{2i\varphi} e^{iny} + \frac{A^2}{\mu} (k^2 + m^2) S_1^2 e^{2i\varphi} e^{2imz} + c.c. \\ & + \text{Konstante}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Der Druck besitzt einen zusätzlichen Wellenanteil $e^{2i\varphi} e^{2imy}$. Dieser stammt aus den quadratischen Termen der Lorentzkraft. Dieser Wellenanteil mit $2\omega, 2k$ und $2m$ erfüllt die Dispersionsrelation (4.8) nicht. Das ist legitim, denn der Druck p_2 wird über die Impulsbilanz bestimmt und muss die Dispersionsrelation nicht erfüllen.

Die zur dynamischen Übergangsbedingungen beitragenden Magnetfelder stehen im Anhang. Sie lautet in zweiter Ordnung in zwei Raumdimensionen ohne Oberflächenspannung:

$$\begin{aligned} ||p_2 + \frac{A}{\mu} a_2 + \frac{a_1^2}{2\mu} - \frac{c_1^2}{2\mu}|| + s_1 ||p_{1z} + \frac{A}{\mu} a_{1z}|| - (s_{1x}^2 + s_{1y}^2) ||P + \frac{A^2}{2\mu}|| \\ + 2s_{1x} ||\frac{A}{\mu} c_1|| + s_{1x}^2 ||P - \frac{A^2}{2\mu}|| = g ||\rho|| s_2 - \frac{1}{2} ||N^2 \rho|| s_1^2. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Bei der Berechnung der nichtlinearen quadratischen Terme der dynamischen Übergangsbedingung treten Größen auf, die nicht von den schnellen Koordinaten x, z oder t abhängen:

$$\left\{ \rho_2 N_2^2 - \rho_1 N_1^2 + \frac{A_2^2}{\mu_2} (k^2 + 3m_2^2) - \frac{A_1^2}{\mu_1} (k^2 + 3m_1^2) + 2m_1^2 \rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 - 2m_2^2 \rho_2 (-\omega + U_2 k)^2 \right\} |S_1|^2. \quad (4.77)$$

Unter Verwendung der Dispersionsrelationen der Teilströmungen (4.8) kann der Beitrag umgeformt werden:

$$\left\{ \frac{A_2^2}{\mu_2} (k^2 + m_2^2) - 2 \frac{N_2^2 m_2^2 \rho_2}{k^2 + m_2^2} + N_2^2 \rho_2 - \frac{A_1^2}{\mu_1} (k^2 + m_1^2) + 2 \frac{N_1^2 m_1^2 \rho_1}{k^2 + m_1^2} - N_1^2 \rho_1 \right\} |S_1|^2. \quad (4.78)$$

Diese Beträge müssen in die Druckterme $p_2^{(1)}$ und $p_2^{(2)}$ aufgenommen werden, damit Gleichung (4.76) erfüllt werden kann:

$$Konstante = - \left\{ \frac{A^2}{\mu} (k^2 + m^2) - 2 \frac{N^2 m^2 \rho}{k^2 + m^2} + N^2 \rho \right\} |S_1|^2. \quad (4.79)$$

Beim Kelvin-Helmholtz-Problem ohne Stratifizierung treten diese Konstanten nicht auf, denn dort gilt $m_1 = m_2 = \pm ik$ und $N_1^2 = N_2^2 = 0$. Diese Konstanten führen in der dritten Störungsordnung zu unphysikalischen Lösungen. Die dynamische Übergangsbedingung muss für beide Wellenbewegungen $e^{i(kx - \omega t)}$ und $e^{2i(kx - \omega t)}$ erfüllt werden. Setzt man die ermittelten Funktionen ein, so folgt aus (4.76) für den Koeffizienten zur Grundwelle:

$$e^{i(kx - \omega t)} \cdot \left[\frac{2\omega}{k^3} \{m_1 \rho_1 (-\omega + U_1 k) + m_2 \rho_2 (-\omega + U_2 k)\} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{1}{k^2} \left\{ -\rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 + \frac{A_1^2}{\mu_1} k^2 + \rho_2 (-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A_2^2}{\mu_2} k^2 \right\} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} - \frac{2}{k^2} \{m_1 (-\omega + U_1 k) + m_2 (-\omega + U_2 k)\} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \right] = 0, \quad \forall x, t. \quad (4.80)$$

Die Vorfaktoren vor den Ableitungen kann man mithilfe der Dispersionsrelation F_{B_T} (4.37) ausdrücken. Es handelt sich dabei um die ersten Ableitungen nach der Kreisfrequenz und den Wellenzahlkomponenten. Die eckige Klammer liefert eine Evolutionsgleichung für die Amplitude $S_1(X_1, T_1)$ auf der Trennfläche $z = 0$ und $Z_1 = 0$:

$$-\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} = 0, \quad \forall x, t. \quad (4.81)$$

Die Ableitungen sind an der Trennfläche $z = 0$ auszuwerten. Die Gleichung (4.81) muss konsistent mit den Evolutionsgleichungen der Teilströmungen (4.71) sein.

Die Terme proportional zu $e^{2i(kx - \omega t)}$ ergeben unter der Verwendung aller Dispersionsrelationen der ersten Ordnung die folgende Gleichung:

$$e^{2i(kx - \omega t)} \cdot \left[- \left(N_1^2 \rho_1 \frac{k^2 - m_1^2 + 2m_1 n_1}{2(k^2 + m_1^2)} - N_2^2 \rho_2 \frac{k^2 - m_2^2 + 2m_2 n_2}{2(k^2 + m_2^2)} \right) S_1^2 - i \left(N_1^2 \rho_1 \frac{m_1 - n_1}{k^2 + m_1^2} + N_2^2 \rho_2 \frac{m_2 - n_2}{k^2 + m_2^2} \right) S_2 \right] = 0. \quad (4.82)$$

Damit die eckige Klammer verschwindet, muss für die Amplitude S_2 gelten:

$$S_2 = iS_1^2 \cdot \frac{N_1^2 \rho_1 (k^2 - m_1^2 + 2m_1 n_1) (k^2 + m_2^2) - N_2^2 \rho_2 (k^2 - m_2^2 + 2m_2 n_2) (k^2 + m_1^2)}{2 \{N_1^2 \rho_1 (m_1 - n_1) (k^2 + m_2^2) + N_2^2 \rho_2 (m_2 - n_2) (k^2 + m_1^2)\}}. \quad (4.83)$$

Die sogenannte Zweite Harmonische Resonanz tritt auf, wenn der Nenner eine Nullstelle aufweist:

$$N_1^2 \rho_1 \frac{(m_1 - n_1)}{(k^2 + m_1^2)} + N_2^2 \rho_2 \frac{(m_2 - n_2)}{(k^2 + m_2^2)} = n_1 \left\{ (-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A_1^2 k^2}{\mu_1 \rho_1} \right\} + n_2 \left\{ (-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A_2^2 k^2}{\mu_2 \rho_2} \right\} + i g k^2 (\rho_2 - \rho_1). \quad (4.84)$$

Der Nenner ist nichts anderes als die Dispersionsrelation erster Ordnung (4.8), gebildet mit den Wellenzahlen n , statt m . Bei der Kelvin-Helmholtz-Instabilität ohne Stratifizierung wurde die Zweite Harmonische Resonanz durch die dispersiven Anteile durch Schwerkraft und Oberflächenspannung erzeugt. Die Oberflächenspannung ist hier nicht im Modell enthalten. Wie auch im vorliegenden Fall besitzt die erste Harmonische $e^{2i(kx - \omega t)}$ dann die gleiche Phasengeschwindigkeit wie die Grundwelle $e^{i(kx - \omega t)}$. Der Sonderfall $m_2 = n_2$ und $m_1 = n_1$ tritt bei $k = 0$ auf.

Die Evolutionsgleichungen der Amplituden in den Teilströmungen (4.71) und der Trennfläche (4.81) mit den Dispersionsrelationen F_{B_T} (4.37) und F_B (4.8) lauten:

$$-\frac{\partial F_{B_1}}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_{B_1}}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{\partial F_{B_1}}{\partial m_1} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} = 0, \quad (4.85)$$

$$-\frac{\partial F_{B_2}}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_{B_2}}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{\partial F_{B_2}}{\partial m_2} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} = 0, \quad (4.86)$$

$$-\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} = 0. \quad (4.87)$$

Die beiden Evolutionsgleichungen (4.85) und (4.86) entsprechen den Dispersionsrelationen freier Wellen in der linearisierten Theorie. Die dritte Gleichung erzeugt die Dispersionsrelationen der zur ausgelenkten Trennfläche gehörenden Wellen.

Für die Amplitude in den beiden Teilströmungen setzt man ebene Wellen an:

$$S_1(X_1, Z_1, T_1) = S_1 e^{i(KX_1 - M_1 Z_1 - \Omega T_1)} + c.c. \quad \text{für } z, Z_1 \geq 0, \quad (4.88)$$

$$S_1(X_1, Z_1, T_1) = S_1 e^{i(KX_1 + M_2 Z_1 - \Omega T_1)} + c.c. \quad \text{für } z, Z_1 \leq 0. \quad (4.89)$$

Mit diesen Ansätzen erhält man aus den Evolutionsgleichungen das algebraische Gleichungssystem:

$$\Omega \frac{\partial F_{B_1}}{\partial \omega} + K \frac{\partial F_{B_1}}{\partial k} + M_1 \frac{\partial F_{B_1}}{\partial m_1} = 0, \quad (4.90)$$

$$\Omega \frac{\partial F_{B_2}}{\partial \omega} + K \frac{\partial F_{B_2}}{\partial k} + M_2 \frac{\partial F_{B_2}}{\partial m_2} = 0, \quad (4.91)$$

$$\Omega \frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} + K \frac{\partial F_{B_T}}{\partial k} + M_1 \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} + M_2 \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} = 0. \quad (4.92)$$

Aus den ersten beiden Dispersionsrelationen gewinnt man die Wellenzahlkomponenten M_1 und M_2 der Modulationswellen der Teilströmungen:

$$M_1 = \frac{\partial m_1}{\partial \omega} \Omega + \frac{\partial m_1}{\partial k} K, \quad (4.93)$$

$$M_2 = \frac{\partial m_2}{\partial \omega} \Omega + \frac{\partial m_2}{\partial k} K. \quad (4.94)$$

Dabei wurde verwendet, dass für eine Funktion $F_B(\omega, k, m) = 0$ die Zusammenhänge

$$\frac{\partial m}{\partial \omega} = -\frac{\frac{\partial F_B}{\partial \omega}}{\frac{\partial F_B}{\partial m}}, \quad \frac{\partial m}{\partial k} = -\frac{\frac{\partial F_B}{\partial k}}{\frac{\partial F_B}{\partial m}} \quad (4.95)$$

gelten. Unter Berücksichtigung der Wellenzahlen M_1 und M_2 kann aus der Evolutionsgleichung an der Trennfläche (4.92) die Dispersionsrelation $\Omega(K)$ gewonnen werden:

$$\begin{aligned} \Omega \left(\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial \omega} \right) \\ + K \left(\frac{\partial F_{B_T}}{\partial k} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial k} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial k} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke sind die totalen Ableitungen der Dispersionsrelation F_{B_T} nach ω und k , wobei die Abhängigkeiten $m_1(\omega, k)$ und $m_2(\omega, k)$ durch die Kettenregel berücksichtigt sind.

Für $F_{B_T}(\omega, k, m_1(\omega, k), m_2(\omega, k)) = 0$ gilt

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = -\frac{\frac{dF_{B_T}}{dk}}{\frac{dF_{B_T}}{d\omega}} \quad (4.97)$$

und damit wird (4.96) zu

$$\Omega - \frac{\partial \omega}{\partial k} K = 0. \quad (4.98)$$

Die Modulationswelle $S_1(X_1, T_1) = S_1 e^{i(KX_1 - \Omega T_1)} + c.c.$ pflanzt sich mit der Gruppengeschwindigkeit $\frac{\partial \omega}{\partial k}$ in x -Richtung fort. Bei diesem Vorgang werden Modulationswellen in beide Teilströmungen abgestrahlt, deren Wellenzahlkomponenten M_1 und M_2 über die Dispersionsrelationen (4.93) und (4.94) bestimmt werden. Die Gruppengeschwindigkeit lautet für die Lösungen (4.53):

$$\frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial k} = \frac{1}{2} (U_1 + U_2) \pm \frac{-(U_2 - U_1)^2 k + c_A^2 k}{\sqrt{-(U_2 - U_1) k^2 + c_A^2 k^2 + 2N^2}}. \quad (4.99)$$

Die Wellenzahlkomponenten der Modulation sind im allgemeinen komplexe Größen. Die involvierten Ableitungen der Wellenzahlen m lauten:

$$\frac{\partial m}{\partial \omega} = \frac{N^2 k^2 (-\omega + Uk)}{m \left\{ (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \right\}^2}, \quad (4.100)$$

$$\frac{\partial m}{\partial k} = \frac{N^2 k^2 \left\{ U(-\omega + Uk) - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} k \right\}}{m \left\{ (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \right\}^2} + m/k. \quad (4.101)$$

Im Falle linear stabiler Wellen und stabiler Modulation sind ω und Ω reell. Dann entscheiden die letzten beiden Ableitungen, ob die Wellenzahlen M der Modulation reell, imaginär oder komplex sind.

4.4 Störungstheorie dritter Ordnung

Die kinematische Übergangsbedingung in dritter Ordnung lautet für zwei Raumdimensionen in den verwendeten kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 + U s_{3x} - w_3 = & - \left(\frac{\partial s_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial s_2}{\partial X_1} + \frac{\partial s_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial s_1}{\partial X_2} \right) + s_2 w_{1z} + s_1 \frac{\partial w_1}{\partial Z_1} \\ & + s_1 w_{2z} + \frac{1}{2} s_1 w_{1zz} - \left(u_1 s_{2x} + u_1 \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + u_2 s_{1x} + s_1 u_{1z} s_{1x} \right). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Zunächst muss man davon ausgehen, dass die Terme der rechten Seite drei Wellenbewegungen darstellen: Die Grundwelle $e^{i(kx-\omega t)}$ und die nächsten harmonischen $e^{2i(kx-\omega t)}$ und $e^{3i(kx-\omega t)}$. Die nachfolgende Rechnung zeigt, dass die Amplitude S_1 nicht von den Variablen X_1, Z_1 oder T_1 abhängen darf, so dass die Ableitungen von s_1 und s_2 nach X_1, Z_1 und T_1 verschwinden und damit die einzigen Vertreter der ersten Harmonischen $e^{2i(kx-\omega t)}$. Es werden also nur die Grundwelle und $e^{3i(kx-\omega t)}$ erzeugt.

Für die Auslenkung in dritter Ordnung s_3 wird analog zur Störungstheorie zweiter Ordnung ein Wellenansatz gemacht:

$$s_3 = S_3 e^{3i(kx-\omega t)} + c.c. \quad (4.103)$$

Damit ist die senkrechte Geschwindigkeitskomponente einer Teilströmung bei $z = 0$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} w_3|_{z=0} = & e^{i\varphi} \left[\frac{1}{2} i m (3m - 2n) (-\omega + Uk) |S_1|^2 S_1 \right. \\ & \left. + (m - n) (-\omega + Uk) S_1^* S_2 + \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_2} \right] \\ & e^{2i\varphi} \left[2i \left\{ m \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) - (-\omega + Uk) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} S_1 + \frac{\partial S_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_2}{\partial X_1} \right] \\ & e^{3i\varphi} (-\omega + Uk) \left[i \frac{3}{2} m_1 (m_1 - 2n_1) S_1^3 - 3(m + n) S_1 S_2 + 3i S_3 \right] + c.c.. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Die Terme proportional zu $e^{2i(kx-\omega t)}$ werden bei einer Wahl $S_1 = S_1(X_2, Z_2, T_2)$ alle verschwinden. Dann besitzt w_3 die zwei Wellenbewegungen $e^{i(kx-\omega t)}$ und $e^{3i(kx-\omega t)}$. Die Wellenbewegung $e^{3i(kx-\omega t)}$ erzeugt eine Wellenabstrahlung in die Teilströmungen der Form $e^{3i(kx-\omega t)+ioz}$ mit noch zu bestimmender Wellenzahlkomponente o .

Aus den Feldgleichungen dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 + U u_{3x} + \frac{1}{\rho_0^*} p_{3x} = & - \left(\frac{\partial u_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_2}{\partial X_1} \right) - u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} - w_1 \frac{\partial u_1}{\partial Z_1} \\ & - u_2 u_{1x} - w_2 u_{1z} - u_1 u_{2x} - w_1 u_{2z} + \frac{c_1}{\mu \rho_0^*} (c_{2x} - a_{2z}) + \frac{c_2}{\mu \rho_0^*} (c_{1x} - a_{1z}) \\ & + \frac{c_1}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial c_1}{\partial X_1} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_1} \right) - \left(\frac{\partial u_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_1}{\partial X_2} \right), \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned}
\dot{w}_3 + U w_{3x} + \frac{1}{\rho_0^*} p_{3z} + \frac{A}{\mu \rho_0^*} (c_{3x} - a_{3z}) + \frac{g}{\rho_0} \tilde{\rho}_3 = & - \left(\frac{\partial w_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial w_2}{\partial X_1} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_2}{\partial Z_1} \right) \\
& - \frac{A}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial c_2}{\partial X_1} - \frac{\partial a_2}{\partial Z_1} \right) - \left(\frac{\partial w_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial w_1}{\partial X_2} + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_1}{\partial Z_2} \right) - \frac{A}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial c_1}{\partial X_2} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_2} \right) \\
& - u_2 w_{1x} - w_2 w_{1z} - u_1 w_{2x} - w_1 w_{2z} - \frac{a_2}{\mu \rho_0^*} (c_{1x} - a_{1z}) - \frac{a_1}{\mu \rho_0^*} (c_{2x} - a_{2z}) \\
& - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_2}{\partial Z_1} - \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_1}{\partial Z_2} - u_1 \frac{\partial w_1}{\partial X_1} - w_1 \frac{\partial w_1}{\partial Z_1} - \frac{a_1}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial c_1}{\partial X_1} - \frac{\partial a_1}{\partial Z_1} \right), \quad (4.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{a}_3 + U a_{3x} - A u_{3x} = & - \left(\frac{\partial a_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial a_2}{\partial X_1} - A \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) \\
& - \left(\frac{\partial a_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial a_1}{\partial X_2} - A \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right) - u_1 \frac{\partial a_1}{\partial X_1} - w_1 \frac{\partial a_1}{\partial Z_1} + a_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + c_1 \frac{\partial u_1}{\partial Z_1} \\
& - u_1 a_{2x} - w_1 a_{2y} + a_1 u_{2x} + c_1 u_{2z} - u_2 a_{1x} - w_2 a_{1y} + a_2 u_{1x} + c_2 u_{1z}, \quad (4.107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{c}_3 + U c_{3x} - A w_{3x} = & - \left(\frac{\partial c_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial c_2}{\partial X_1} - A \frac{\partial w_2}{\partial X_1} \right) \\
& - \left(\frac{\partial c_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial c_1}{\partial X_2} - A \frac{\partial w_1}{\partial X_2} \right) - u_1 \frac{\partial c_1}{\partial X_1} - w_1 \frac{\partial c_1}{\partial Z_1} + a_1 \frac{\partial w_1}{\partial X_1} + c_1 \frac{\partial w_1}{\partial Z_1} \\
& - u_1 c_{2x} - w_1 c_{2y} + a_1 w_{2x} + c_1 w_{2z} - u_2 c_{1x} - w_2 c_{1z} + a_2 w_{1x} + c_2 w_{1y}, \quad (4.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}_3 + U \tilde{\rho}_{3x} + \frac{\partial \rho_0}{\partial z} w_3 = & - \left(\frac{\partial \tilde{\rho}_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial \tilde{\rho}_2}{\partial X_1} \right) - \left(\frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial X_2} \right) \\
& - u_2 \tilde{\rho}_{1x} - w_2 \tilde{\rho}_{1z} - u_1 \tilde{\rho}_{2x} - w_1 \tilde{\rho}_{2z} - u_1 \frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial X_1} - w_1 \frac{\partial \tilde{\rho}_1}{\partial Z_1}, \quad (4.109)
\end{aligned}$$

kann man eine lineare Differentialgleichung herleiten, die nur die Geschwindigkeitskomponenten w_3, w_2 und w_1 enthält:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \Delta w_3 - N^2 w_{3xx} = \\
& - 2 \left\{ (\partial_t + U \partial_x) \left(\frac{\partial w_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial w_1}{\partial X_2} \right) - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \frac{\partial w_{1x}}{\partial X_2} \right\} \\
& - 2 \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \left(\frac{\partial w_{1x}}{\partial X_2} + \frac{\partial w_{1z}}{\partial Z_2} \right) - 2 N^2 \frac{\partial w_{1x}}{\partial X_2} \\
& + \text{lineare Terme} \propto \frac{\partial w_1}{\partial X_1}, \frac{\partial w_1}{\partial Z_1}, \frac{\partial w_1}{\partial T_1}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial X_1^2}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial Z_1^2}, \frac{\partial^2 w_1}{\partial T_1^2}, \frac{\partial w_2}{\partial X_1}, \frac{\partial w_2}{\partial Z_1}, \frac{\partial w_2}{\partial T_1}.
\end{aligned} \quad (4.110)$$

Wie bei den Gleichungen zweiter Ordnung erhält man eine lineare Differentialgleichung für die Komponenten u_3, w_3, a_3, b_3 und $\tilde{\rho}_3$. Die nichtverschwindenden nichtlinearen Terme in den Impulsbilanzen müssen in den Druck p_3 eingehen. Der Druck p_3 enthält im Gegensatz zu den Geschwindigkeits- und Magnetfeldern

damit weitere Wellenanteile, die durch die Nichtlinearitäten der Felder entstehen. Es gibt Beiträge, die nicht von den Variablen erster Ordnung x, z oder t abhängen, sie sind Konstanten dieser Zeit- und Ortsskalen:

$$\begin{aligned}
& u_1 u_{2x} + w_1 u_{2z} + u_2 u_{1x} + w_2 u_{1z} - \frac{c_1}{\mu \rho_0^*} (a_{2z} - c_{2x}) - \frac{c_2}{\mu \rho_0^*} (a_{1z} - c_{1x}) \\
& u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + w_1 \frac{\partial u_1}{\partial Z_1} - \frac{c_1}{\mu \rho_0^*} \left(\frac{\partial a_2}{\partial Z_1} - \frac{\partial c_2}{\partial X_1} \right) + \frac{1}{\rho_0^*} \frac{\partial p_2}{\partial X_2} = \\
& \frac{4m^2}{k^2} \left\{ (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} k^2 \right\} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} S_1^* + \frac{2m}{k} \left\{ (-\omega + Uk)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} k^2 \right\} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} S_1^* \\
& + c.c. + \dots \quad (4.111)
\end{aligned}$$

Die nichtlinearen Terme der z -Komponente der Impulsbilanz liefert ähnliche Terme. Die geschweiften Klammern können mit den Dispersionsrelationen (4.8) umgewandelt werden. Die Druckfunktion in dritter Ordnung würde dann Terme enthalten, die linear in x - und z -Richtung anwachsen. Für den Druck in der oberen Strömung würde gelten:

$$\begin{aligned}
p_3^{(1)} &= 2\rho_1 N_1^2 \frac{m_1}{k^2 + m_1^2} \left(k \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} - 2m_1 \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) x \\
&+ 2\rho_1 N_1^2 \left(-\frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + k^2 \frac{m_1}{k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) z + \dots \quad (4.112)
\end{aligned}$$

Um dieses unphysikalische Phänomen zu vermeiden, muss man davon ausgehen, dass die Amplitude S_1 nicht von X_1 und Z_1 abhängt. Aus den Evolutionsgleichungen der beiden Teilströmungen (4.85) und (4.86) folgt dann, dass S_1 auch nicht von T_1 abhängen kann.

Führt man die Störungstheorie nur bis zweiter Ordnung durch, stellt die Abhängigkeit der Amplitude von den langsamen Variablen X_1, Z_1 und T_1 kein Problem dar. Mit der Vereinbarung die Amplitude nur von den Größen der ε^{-2} -Skala abhängen zu lassen, vereinfacht sich die Feldgleichung für die Geschwindigkeits- und Induktionskomponenten (4.110) auf:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (\partial_t + U \partial_x)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} \partial_{xx} \right\} \Delta w_3 - N^2 w_{3xx} = \\
& \left(-\frac{\partial F_B}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial F_B}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + \frac{\partial F_B}{\partial m} \frac{\partial S_1}{\partial Z_2} \right) e^{i(kx + mz - \omega t)} + c.c. \quad (4.113)
\end{aligned}$$

Auch in dritter Ordnung ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung [76]. Der Wellenanteil $e^{i(kx + mz - \omega t)}$ erzeugt auf der linken Seite die Dispersionsrelation der linearisierten Theorie. Deshalb muss auch die rechte Seite identisch verschwinden (Säkularbedingung):

$$-\frac{\partial F_B}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial F_B}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + \frac{\partial F_B}{\partial m} \frac{\partial S_1}{\partial Z_2} = 0. \quad (4.114)$$

Wie in der Störungstheorie zweiter Ordnung ergibt sich eine Evolutionsgleichung für beide Teilströmungen. Die zweite harmonische Welle $e^{3i(kx - \omega t) - ioz}$ liefert auf der linken Seite eine Dispersionsrelation:

$$\left\{ (-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho_0^*} k^2 \right\} (9k^2 + o^2) - 9^2 N^2 k^2 = 0. \quad (4.115)$$

Im Vergleich mit der Dispersionsrelation der Grundwelle (4.8) ergibt sich die Relation:

$$o^2 = m^2 - 8k^2. \quad (4.116)$$

Das Quadrat der Wellenzahl o ist immer kleiner als m^2 . Liegt in erster Ordnung eine Wellenabstrahlung mit reellem m vor, dann ist o imaginär, wenn $|\frac{m}{k}| < \sqrt{8}$ ist. Das entspricht Winkeln um 70° zwischen Wellenvektor und der x -Achse. In zweiter Ordnung klingen die Lösungen dann exponentiell ab. Gibt es in erster Ordnung abklingende Lösungen mit m imaginär, dann fallen die Lösungen dritter Ordnung noch schneller ab.

Für jede der Teilströmungen gilt aufgrund der unterschiedlichen Dispersionsrelationen (4.8) im allgemeinen eine Evolutionsgleichungen (4.114) und eine Relation (4.116) mit den entsprechenden Halbraumdaten.

Die dynamische Übergangsbedingung dritter Ordnung liefert zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \|p_3 + \frac{A}{\mu}a_3\| + s_1\|p_{2z} + \frac{\partial p_1}{\partial Z_1} + \frac{A}{\mu}a_{2z} + \frac{A}{\mu}\frac{\partial a_1}{\partial Z_1}\| + \frac{1}{2}s_1^2\|p_{1zz} + \frac{A}{\mu}a_{1zz}\| \\ & + \|\frac{a_1a_2}{\mu} + \frac{c_1c_2}{\mu}\| + s_1\|\frac{\partial a_1}{\partial Z_1}\frac{a_1}{\mu} + \frac{\partial c_1}{\partial Z_1}\frac{c_1}{\mu}\| \\ & = g\|\rho_0^*\|s_3 - g\|N^2\rho_0^*\|s_1s_2 + \frac{1}{6g}\|N^4\rho_0^*\|s_1^3. \end{aligned} \quad (4.117)$$

Der Vorfaktor zur zweiten Harmonischen $e^{3i\varphi}$ ist eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude S_3 . Aus Gleichung (4.117) gewinnt man aus den Koeffizienten der Grundwelle $e^{i(kx-\omega t)}$ eine Evolutionsgleichung für die Amplitude auf der ε^{-2} -Skala:

$$-i\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega}\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + i\frac{\partial F_{B_T}}{\partial k}\frac{\partial S_2}{\partial X_2} - i\frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} + i\frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} = i\lambda_B|S_1|^2S_1. \quad (4.118)$$

Im Gegensatz zu der Evolutionsgleichung (4.87) entsteht hier eine kubische Nichtlinearität mit Landaukoeffizient λ_B :

$$\begin{aligned} \lambda_B = 2 \left\{ \frac{m_1^3 N_1^2 \rho_1}{k^2 + m_1^2} + \frac{m_2^3 N_2^2 \rho_2}{k^2 + m_2^2} - i\frac{N_1^4 \rho_1}{4g} + i\frac{N_2^4 \rho_2}{4g} \right\} \\ - 4i \left\{ \frac{m_1^2 N_1^2 \rho_1}{k^2 + m_1^2} - \frac{m_2^2 N_2^2 \rho_2}{k^2 + m_2^2} - \frac{1}{4}N_1^2 \rho_1 + \frac{1}{4}N_2^2 \rho_2 \right\} \frac{S_2 S_1^*}{|S_1|^2 S_1}. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Wenn man für die Modulation in den Teilströmungen Wellenansätze entsprechend (4.88) wählt:

$$S_1(X_2, Z_2, T_2) = S_1 e^{i(KX_2 - \Omega T_2 - M_1 Z_2)} + c.c. \quad \text{für } z, Z_1 \geq 0, \quad (4.120)$$

$$S_1(X_2, Z_2, T_2) = S_1 e^{i(KX_2 - \Omega T_2 + M_2 Z_2)} + c.c. \quad \text{für } z, Z_1 \leq 0, \quad (4.121)$$

erhält man aus dem Gleichungssystem der Evolutionsgleichungen

$$-\frac{\partial F_{B_1}}{\partial \omega}\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial F_{B_1}}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial X_2} - \frac{\partial F_{B_1}}{\partial m_1}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} = 0, \quad (4.122)$$

$$-\frac{\partial F_{B_2}}{\partial \omega}\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial F_{B_2}}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial X_2} + \frac{\partial F_{B_2}}{\partial m_2}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} = 0, \quad (4.123)$$

$$-\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega}\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial k}\frac{\partial S_1}{\partial X_2} - \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2}\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} = \lambda_B|S_1|^2S_1, \quad (4.124)$$

wie schon in der zweiten Störungsordnung Bestimmungsgleichungen für die Wellenzahlen M_1 und M_2 :

$$\begin{aligned} M_1 &= \Omega \frac{\partial m_1}{\partial \omega} + K \frac{\partial m_1}{\partial k}, \\ M_2 &= \Omega \frac{\partial m_2}{\partial \omega} + K \frac{\partial m_2}{\partial k} \end{aligned} \quad (4.125)$$

und als Evolutionsgleichung der Amplitude S_1 für die Trennfläche eine Landaugleichung mit kubischer Nichtlinearität:

$$\begin{aligned} i \left(\frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial \omega} \right) \Omega S_1 \\ + i \left(\frac{\partial F_{B_T}}{\partial k} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial k} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial k} \right) K S_1 = \lambda_B |S_1|^2 S_1. \end{aligned} \quad (4.126)$$

Der Landaukoeffizient λ_B enthält ungerade Potenzen der Wellenzahlkomponenten m und n und ist damit im allgemeinen eine komplexe Größe. F_{B_T} ist ebenfalls eine komplexe Größe. Im anschließenden Kapitel wird die Stabilität spezieller Lösungen der Landaugleichung untersucht.

Aus Gleichung (4.117) gewinnt man aus den Koeffizienten der dritten Harmonischen $e^{3i(kx-\omega t)}$ eine Bestimmungsgleichung für die Amplitude S_3 aus dem Ansatz (4.103). Mit der Angabe von S_3 ist das Gleichungssystem im Rahmen der Störungstheorie bis zur dritten Ordnung exakt gelöst. Beim Kelvin-Helmholtz-Problem ohne Stratifizierung wurden höher harmonische Funktionen in dritter Ordnung Störungstheorie vernachlässigt.

4.5 Nichtlineare Stabilitätsanalyse

Im Verlauf der Störungstheorie für Fluide in der Boussinesq-Näherung wurde die Annahme gemacht, dass die Amplitude nicht von den Größen der ε^{-1} -Skala abhängen kann, um unphysikalische Lösungen zu vermeiden. Damit vereinfachen sich auch die Evolutionsgleichungen drastisch. Es werden hier ausschließlich linear stabile Strömungen untersucht. In diesem Fall ist ω reell. Der Landaukoeffizient ist im allgemeinen eine komplexe Größe. Aus (4.126) erhält man mit (4.97) eine Dispersionsrelation mit dem Stabilitätsparameter $\frac{\lambda_B}{i \frac{dF_{B_T}}{d\omega}}$:

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial k} K + \frac{\lambda_B}{i \frac{dF_{B_T}}{d\omega}} |S_1|^2. \quad (4.127)$$

Ein Realteil von $\frac{\lambda_B}{i \frac{dF_{B_T}}{d\omega}}$ modifiziert im Produkt mit dem Amplitudenquadrat die Phasengeschwindigkeit. Ein Imaginärteil des Stabilitätsparameters läßt die Lösung $e^{i(KX_2 - \Omega T_2)}$ abhängig vom Vorzeichen im weiteren Zeitverlauf exponentiell abklingen oder ansteigen. Die symbolische Ableitung der Dispersionsrelati-

on der gebundenen Wellen (4.37) nach ω lautet:

$$\begin{aligned} \frac{dF_{B_T}}{d\omega} &= \frac{\partial F_{B_T}}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_1} \frac{\partial m_1}{\partial \omega} + \frac{\partial F_{B_T}}{\partial m_2} \frac{\partial m_2}{\partial \omega} \\ &= -\frac{2i}{k^2} \{m_1 \rho_1 (-\omega + U_1 k) + m_2 \rho_2 (-\omega + U_2 k)\} \\ &\quad + i \frac{N_1^2 \rho_1 (-\omega + U_1 k)}{m_1 \left\{(-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A_1^2}{\mu_1 \rho_1} k^2\right\}} + i \frac{N_2^2 \rho_2 (-\omega + U_2 k)}{m_2 \left\{(-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A_2^2}{\mu_2 \rho_2} k^2\right\}}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Das untersuchte System soll keinen Dichtesprung an der Trennfläche aufweisen: $\rho = \rho_1 = \rho_2$. Die Brunt-Väisälä-Frequenzen, die magnetischen Induktionen und Permeabilitäten der beiden Teilströmungen sind ebenfalls gleich: $N = N_1 = N_2$, $A = A_1 = A_2$ und $\mu = \mu_1 = \mu_2$. Dann wird aus (4.128):

$$\begin{aligned} \frac{dF_{B_T}}{d\omega} &= -\frac{2i\rho}{k^2} \{m_1 (-\omega + U_1 k) + m_2 (-\omega + U_2 k)\} \\ &\quad + iN^2 \rho \left[\frac{(-\omega + U_1 k)}{m_1 \left\{(-\omega + U_1 k)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho} k^2\right\}} + \frac{(-\omega + U_2 k)}{m_2 \left\{(-\omega + U_2 k)^2 - \frac{A^2}{\mu \rho} k^2\right\}} \right]. \end{aligned} \quad (4.129)$$

In dem untersuchten System folgt für die Amplitude der ersten Harmonischen (4.83):

$$S_2 = iS_1^2 \frac{-m_1 (m_1 - n_1) (k^2 + m_2^2) + m_2 (m_2 - n_2) (k^2 + m_1^2)}{(m_1 - n_1) (k^2 + m_2^2) + (m_2 - n_2) (k^2 + m_1^2)}. \quad (4.130)$$

Der Landaukoeffizient (4.119) wird zu:

$$\begin{aligned} \lambda_B &= 2N^2 \rho \left(\frac{m_1^3}{k^2 + m_1^2} + \frac{m_2^3}{k^2 + m_2^2} \right) + 4N^2 \rho \left(\frac{m_1^2}{k^2 + m_1^2} - \frac{m_2^2}{k^2 + m_2^2} \right) \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{-m_1 (m_1 - n_1) (k^2 + m_2^2) + m_2 (m_2 - n_2) (k^2 + m_1^2)}{(m_1 - n_1) (k^2 + m_2^2) + (m_2 - n_2) (k^2 + m_1^2)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.131)$$

Der Landaukoeffizient besteht wieder aus zwei Summanden. Der erste Summand stammt aus der kubischen Selbstwechselwirkung der Grundwelle, der zweite Summand aus der Wechselwirkung der Grundwelle mit der ersten Harmonischen.

Die Darstellung des Landaukoeffizienten durch die Wellenzahlkomponenten erlaubt eine erste Abschätzung: Sind sämtliche Wellenzahlkomponenten m und n reell, so ist auch der Landaukoeffizient eine reelle Größe. Sind sämtliche Wellenzahlen m reell, so können je nach Strömungszustand die n -Wellenzahlen unabhängig voneinander imaginär werden. Die m -Wellenzahlen sind nach (4.20) bei linear stabiler Strömung entweder beide reell oder beide imaginär.

Der Radikant aus (4.20) besitzt für ein bestimmtes k_p eine Polstelle bei der Alfvégeschwindigkeit, gemessen im Ruhesystem einer Teilströmung. In diesem Fall ist die Phasengeschwindigkeit gleich einer freien Alfvénwelle. Diese Polstelle bei k_p markiert einen Vorzeichenwechsel des Radikanten. Für $|k| > |k_p|$ sind die Wellenzahlen m und n alle imaginär. Für $|k| < |k_p|$ sind sämtliche m reell. Für

Punkte in der Umgebung dieser Polstelle sind die Gleichungen nicht gültig, da die Langwellennäherung verletzt ist.

Abbildung (4.10) zeigt die normierten Quadrate $\frac{m_1^2}{k^2}$ und $\frac{m_2^2}{k^2}$ in Abhängigkeit von der Wellenzahl k . Dabei wurden die Lösungen (4.53) verwendet. In den folgenden Beispielen sind die Parameter wie folgt gewählt:

$$U_1 = 1; U_2 = 2; \rho = 1; \mu = 1; A = 3; N = 1. \quad (4.132)$$

Die Lösungen $\omega_{2,3}$ (4.53) werden von nun an als ω_{\pm} bezeichnet.

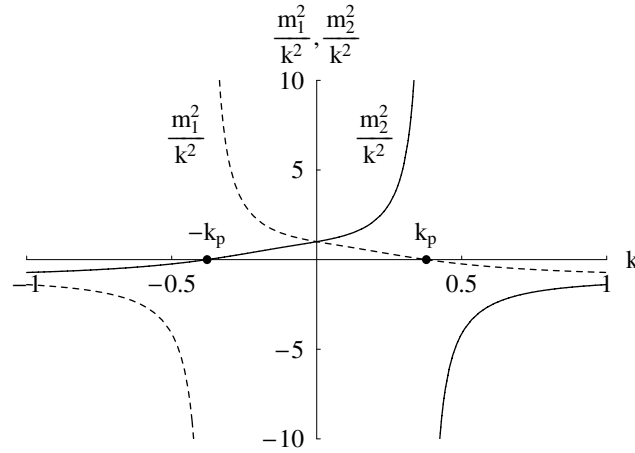


Abbildung 4.10: Quadrate der normierten Wellenzahlen $\frac{m_1}{k}$ und $\frac{m_2}{k}$ über k

Der Schnittpunkt der Kurven mit der Ordinate hängt nicht von den Parametern der Strömung ab. Bei $k = 0$ gilt $\frac{m_1^2}{k^2} = \frac{m_2^2}{k^2} = 1$. Von diesem Punkt steigt eine Wellenzahl monoton, während die andere monoton sinkt. Bei der Polstelle der einen Größe, besitzt die andere eine Nullstelle. Dieses Verhalten stimmt mit der Formel (4.39) überein. Die Polstelle ist durch

$$(-\omega_+ + U_2 k_p)^2 - c_A^2 k_p^2 = 0 \quad (4.133)$$

bestimmt. Dann resoniert die Trennflächenwelle mit einer freien Alfvénwelle. Für $U_2 > U_1$ und $c_A > 0$ erhält man:

$$k_p^2 = \frac{N^2}{(U_1 - U_2)(-2c_A + U_1 - U_2)}. \quad (4.134)$$

Aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass es nur eine Polstelle für $k > 0$ geben kann, da für linear stabile Wellen zwangsläufig die Alfvéngeschwindigkeit größer als die halbe Differenzgeschwindigkeit sein muss: $|c_A| > \frac{1}{2}|U_1 - U_2|$. Für $|k| < |k_p|$ findet Wellenabstrahlung statt. Die Punkte um k_p verletzen allerdings die Langwellenordnung, da eine der beiden m gegen unendlich strebt. Für diese Punkte ist die Theorie ungültig. Für $|k| > |k_p|$ besitzen die Wellenlösungen der Trennfläche exponentiell abfallende Anteile in beide Teilströmungen hinein. Für große k nähern sich beide Zweige -1 .

Die Vorzeichen der Wellenzahlen m_1 und m_2 müssen so gewählt werden, dass sie

im Einklang mit den Wellenansätzen $e^{i(kx-\omega t)}e^{-im_1 z}$ und $e^{i(kx-\omega t)}e^{im_2 z}$ physikalisch sinnvolle Lösungen ergeben. Sind m_1 und m_2 reell, sind in beiden Teilströmungen Wellenbewegungen vorhanden, die je nach Vorzeichen von der Trennfläche ausgehen und bis ins Unendliche ($z = \pm\infty$) propagieren oder vom Unendlichen herkommen und auf die Trennfläche treffen. Die Wellenbewegungen müssen aus Kausalitätsgründen mit einem Energietransport, der von der Trennfläche in beide Teilströmungen hinein geht, verknüpft sein. Die senkrechte Komponente der Gruppengeschwindigkeit muss in der oberen Teilströmung positiv, in der unteren negativ sein, um dieser Interpretation zu genügen. Acheson [1] und Lindzen [48] betrachteten den über eine Wellenlänge in x -Richtung gemittelten Energiefluss der angesetzten Wellen $\overline{p_1 w_1}$. Dieser muss in der oberen Teilströmung positiv, in der unteren Teilströmung negativ sein. Daraus folgt für die gemachten Ansätze:

$$-m_1(-\omega + U_1 k) > 0 \quad \text{und} \quad m_2(-\omega + U_2 k) < 0. \quad (4.135)$$

Diese Bedingungen stimmen mit Achsesons [1] überein. Es kann gezeigt werden, dass die Terme in den Klammern für $|k| < |k_p|$ sowohl für ω_+ als auch für ω_- stets das gleiche Vorzeichen besitzen. m_1 und m_2 müssen aus Kausalitätsgründen das gleiche Vorzeichen aufweisen.

Die dynamische Übergangsbedingung (4.46) stellt ebenfalls eine Bedingung an das Verhältnis der Vorzeichen von m_1 und m_2 . Hier haben die Ausdrücke in den geschweiften Klammern für den betreffenden k -Bereich stets das gleiche Vorzeichen, so dass die Gleichung nur gelöst werden kann, wenn m_1 und m_2 unterschiedliche Vorzeichen besitzen.

Für den Bereich $|k| < |k_p|$ liegen für die Stabilitätsanalyse keine physikalisch sinnvollen Lösungen vor, da die Druckbedingung nicht erfüllt werden kann. Lindzen [48] hat im Zusammenhang mit der Kelvin-Helmholtz-Instabilität mit Stratifizierung ohne Magnetfelder einen k -Bereich beschrieben, indem es aus gleichen Gründen keine neutralen Lösungen geben kann. Erfüllt man die Druckbedingung und läßt den Energiefluss in beiden Teilströmungen in die gleiche Richtung zeigen, sind beide Bedingungen erfüllt. Die Lösung entspricht dann einer aus dem Unendlichen kommenden Welle, die an der Trennfläche ohne Reflexion gebrochen wird und auf der anderen Seite der Trennfläche im Unendlichen verschwindet.

Sind m_1 und m_2 imaginär, besitzen die Lösungen ein exponentielles Verhalten senkrecht zur Trennfläche. Die Lösungen müssen in beide Teilströmungen exponentiell abklingen, damit die Lösungen beschränkt bleiben. Die Imaginärteile m_1 und m_2 müssen negativ sein. Diese Wahl ist im Einklang mit Gleichung (4.46), die aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen der Summen in den geschweiften Klammern das gleiche Vorzeichen von m_1 und m_2 fordert. In den folgenden Abbildungen sind die Wellenzahlen für den Beispielfall aufgetragen. Nach Gleichung (4.134) liegt die Polstelle weiter rechts, je größer die Brunt-Väisälä-Frequenz ist. Je größer die Alfvéngeschwindigkeit, desto weiter liegt die Polstelle links. Gleicht die Alfvéngeschwindigkeit gerade so die Differenzgeschwindigkeit aus, liegt die Polstelle bei $k_p^2 = \frac{N^2}{2(U_1 - U_2)^2}$. Geht die Alfvéngeschwindigkeit gegen unendlich, wandert die Polstelle auf den Ursprung zu.

Diese Polstelle tritt auch beim Koeffizienten $\frac{dF_{BT}}{d\omega}$ (4.129) auf, der unter anderem linear in den Wellenzahlen m_1 und m_2 ist.

Eine entsprechende Diskussion muss auch für die Wellenzahlen n der ersten har-

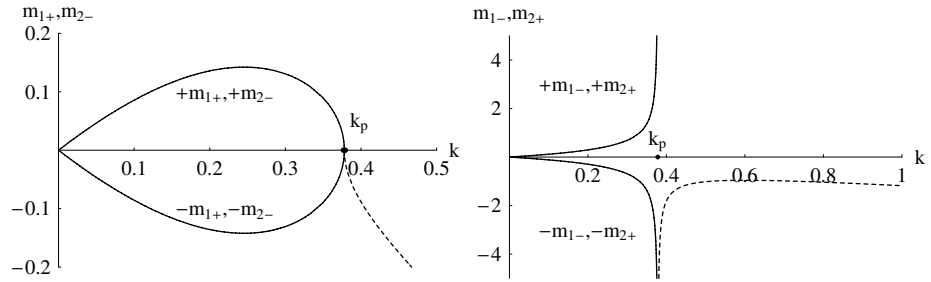


Abbildung 4.11: Die Wellenzahlen $m_{1\pm}$ und $m_{2\pm}$ über k für die stromaufwärts und -abwärts fließenden Wellen ω_{\pm} . Die durchgängig gezeichneten Kurven sind die Realteile. Die Imaginärteile sind gestrichelt eingezeichnet.

monischen Wellenbewegung durchgeführt werden:

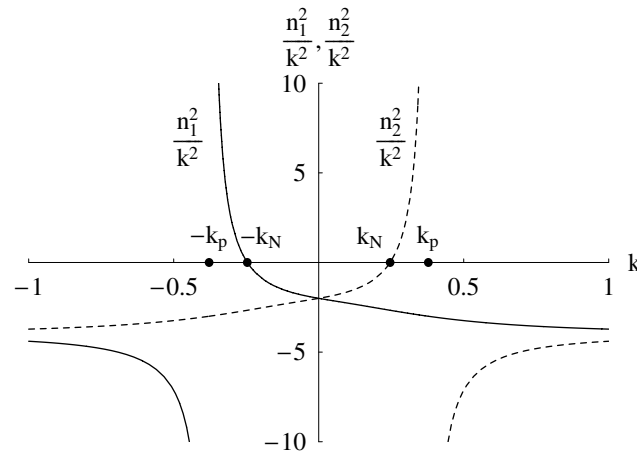


Abbildung 4.12: Quadrate der Wellenzahlen $\frac{n_1}{k}$, $\frac{n_2}{k}$ über k .

Die Kurven sind nach Gleichung (4.73) im Vergleich mit Abbildung (4.10) um 3 Längeneinheiten nach unten verschoben.

Die Grenzwerte für $k = 0$ und sehr große k liegen nach der Dispersionsrelation (4.72) bei -2 und -4 . Die Polstelle ist die gleiche wie in der Kurvendiskussion der m -Wellenzahlen in Abbildung (4.10). Für die erste harmonische Welle liegt meistens ein Abklingverhalten vor. Nur in der Nähe der Polstelle ist eine Wellenabstrahlung in eine der beiden Teilströmungen möglich, während in der anderen die Wellenbewegung exponentiell abklingt. Hier könnte eine Grenze der Instabilität vorliegen, da die stabilen Lösungen der linearisierten Theorie sich durch gleiches Verhalten der Lösungen in beiden Teilströmungen auszeichnen. Ist die Wellenzahl n reell, muss sie so gewählt werden, dass die senkrechte Gruppengeschwindigkeitskomponente von der Trennfläche wegzeigt. Ist n imaginär, so muss der Wert negativ sein, um physikalisch sinnvolle Lösungen zu erhalten, die im Unendlichen abklingen. Die Nullstelle des einen Lösungssastes in Abbildung

(4.12) ist durch

$$k_N^2 = \frac{N^2}{4(U_1 - U_2)^2 + 2\sqrt{(U_1 - U_2)^2(4c_A^2 + 3(U_1 - U_2)^2)}} \quad (4.136)$$

gegeben.

Für eine übersichtliche Analyse des Landau-Koeffizienten (4.131), betrachtet man dessen Summanden zunächst getrennt voneinander. Der Landau-Term wird aufgespalten in:

$$\lambda_B |S_1|^2 S_1 = \lambda_{B_1} |S_1|^2 S_1 + \lambda_{B_2} S_1^* S_2 \quad (4.137)$$

mit

$$\lambda_{B_1} = 2N^2 \rho \left(\frac{m_1^3}{k^2 + m_1^2} + \frac{m_2^3}{k^2 + m_2^2} \right), \quad (4.138)$$

$$\lambda_{B_2} = -4iN^2 \rho \left(\frac{m_1^2}{k^2 + m_1^2} - \frac{m_2^2}{k^2 + m_2^2} \right), \quad (4.139)$$

$$\frac{S_2}{S_1} = i \frac{m_1(m_1 - n_1)(k^2 + m_2^2) - m_2(m_2 - n_2)(k^2 + m_1^2)}{n_1(k^2 + m_2^2) + n_2(k^2 + m_1^2)}. \quad (4.140)$$

Die beiden Teile des Landau-Koeffizienten λ_{B_1} und λ_{B_2} haben eine einfache Struktur. λ_{B_1} ist invariant gegenüber der Vertauschung von m_1 mit m_2 . Die Realteile von m_1 und m_2 müssen, um die Druckbedingung zu erfüllen, verschiedene Vorzeichen haben. Dann unterscheiden sich die Realteile von $\lambda_{B_{1\pm}}$ im Vorzeichen für die ω_+ und ω_- -Lösung, wie im gezeigten Beispiel in Abbildung (4.13) für $Re[m_1] > 0$ und $Re[m_2] < 0$. Für $k < k_p$ ist λ_{B_1} reell, für $k > k_p$ imaginär und nimmt linear in k ab. λ_{B_2} ändert sein Vorzeichen bei einer Vertauschung von m_1 mit m_2 . Für stromaufwärts fließende Wellen gilt die monoton steigende Funktion $\lambda_{B_{2+}}$, für stromabwärts strömende Wellen die monoton fallende Funktion $\lambda_{B_{2-}}$.

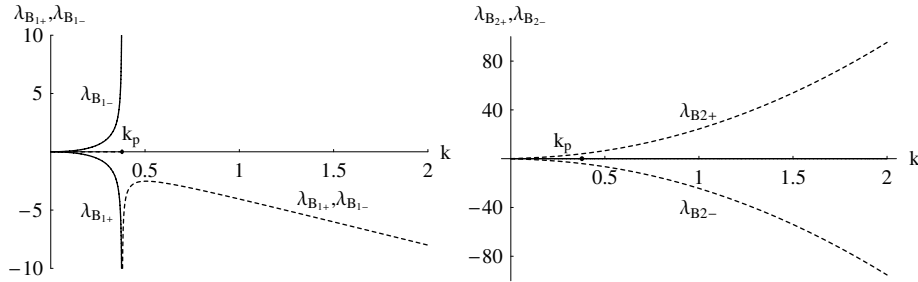


Abbildung 4.13: $\lambda_{B_{1+}}$ und $\lambda_{B_{1-}}$ über k . Abbildung 4.14: $\lambda_{B_{2+}}$ und $\lambda_{B_{2-}}$ über k .

λ_{B_2} weist aufgrund der Struktur der Quotienten keine Polstelle auf.

In der Größe $\frac{S_2}{S_1}$ stehen die Wellenzahlen n der ersten harmonischen Welle. Eine der beiden Wellenzahlkomponenten ist für alle k eine imaginäre Größe. Es sind also bis zur Polstelle mit $|k| < |k_p|$ (4.134) komplexe Werte zu erwarten. Unter einer gemeinsamen Vertauschung der Wellenzahlkomponenten m_1 und n_1 mit jeweils m_2 und n_2 ändert $\frac{S_2}{S_1}$ das Vorzeichen.

Wie man in den folgenden beiden Abbildungen erkennt, unterscheidet sich die Größe $\frac{S_2}{S_1^2}$ für $k < k_p$ für die ω_+ - und ω_- -Lösung um mehr als ein Vorzeichen. In beiden Fällen sind $\text{Re}[m_{1\pm}] > 0$ und $\text{Re}[m_{2\pm}] < 0$, sowie $\text{Re}[n_{1\pm}] > 0$ und $\text{Re}[n_{2\pm}] > 0$ gewählt. Die Imaginärteile der Wellenzahlen sind alle negativ gewählt, damit abklingende Störungen vorliegen. Für $k > k_p$ sind alle involvier-

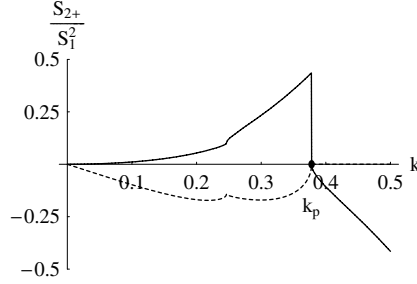


Abbildung 4.15: $\frac{S_2}{S_1^2}(\omega_+)$ über k

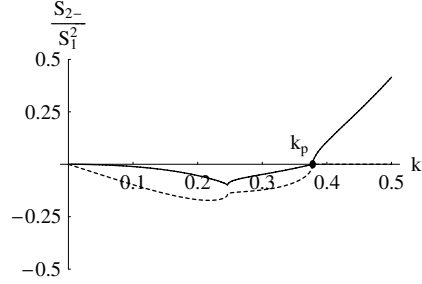


Abbildung 4.16: $\frac{S_2}{S_1^2}(\omega_-)$ über k

ten senkrechten Wellenzahlkomponenten rein imaginär. In diesem Fall haben die senkrechten Wellenzahlen das gleiche Vorzeichen und eine Vertauschung der Wellenzahlkomponenten m_1, n_1 mit m_2, n_2 , was einem Wechsel der ω_+ - zur ω_- -Lösung entspricht, ergibt dann einen Vorzeichenwechsel von $\frac{S_2}{S_1^2}$. Für $k > k_p$ ist $\frac{S_2}{S_1^2}$ eine rein reelle Größe. Bei k_p verschwindet $\frac{S_2}{S_1^2}$. Für $k < k_p$ ist $\frac{S_2}{S_1^2}$ komplex. Die Real- und Imaginärteile weisen an der durch (4.136) festgelegten Stelle einen Knick auf. An dieser Stelle besitzt eine der beiden Wellenzahlen n eine Nullstelle. Für große k steigt der Betrag der Werte schnell an:

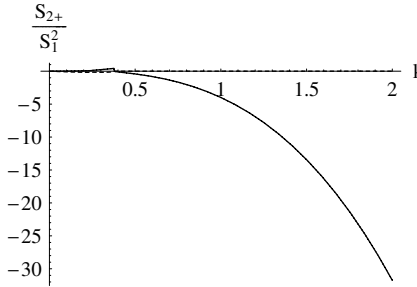


Abbildung 4.17: $\frac{S_2}{S_1^2}(\omega_+)$ über k

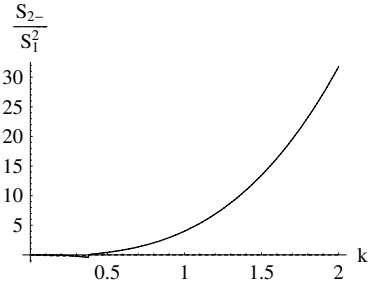


Abbildung 4.18: $\frac{S_2}{S_1^2}(\omega_-)$ über k

Die Produkt $\lambda_{B_2} \frac{S_2}{S_1^2}$ ist für $k > k_p$ wie λ_{B_1} invariant gegenüber Vertauschung der Wellenzahlen. Das bedeutet, dass der Landaukoeffizient λ_B für die Lösungen ω_{\pm} den gleichen Wert besitzt.

In den nächsten beiden Abbildungen sind der Real- und Imaginärteil des Landaukoeffizienten λ_B für Wellenzahlen $k < k_p$ aufgetragen.

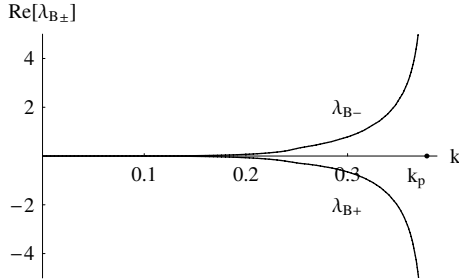


Abbildung 4.19: $\text{Re}[\lambda_B]$ über k

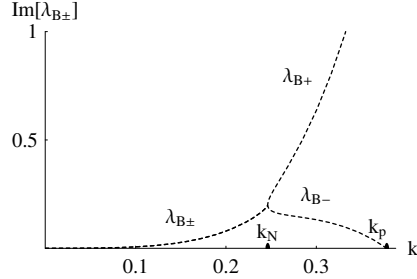


Abbildung 4.20: $\text{Im}[\lambda_B]$ über k

Die Realteile besitzen bei k_p eine Polstelle. Für $k > k_p$ ist λ_B eine rein imaginäre negative Größe. Der Landaukoeffizient λ_B bestimmt die Wirkung der kubischen

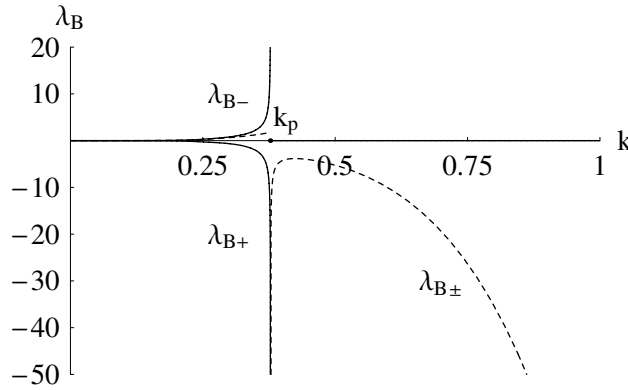


Abbildung 4.21: λ_B über k . Für $k < k_p$ sieht man die durchgezogen gezeichneten Realteile von λ_{B+} und λ_{B-} aus Abbildung (4.19). Für $k > k_p$ ist $\lambda_B = \lambda_{B+} = \lambda_{B-}$ eine negative imaginäre Größe.

Nichtlinearität nicht alleine. Im Nenner des Stabilitätsparameters steht die Ableitung der Dispersionsrelation (4.37). Die Ableitung besteht aus Summanden, die außer reellen Größen die Wellenzahlen m in einfacher Potenz enthalten. Es ist deshalb anzunehmen, dass die Ableitung entweder reelle oder imaginäre Werte ergibt, die durch die Polstelle bei (4.134) voneinander getrennt sind. In den nächsten beiden Abbildungen wird diese Annahme bestätigt.

Die Realteile sind durchgängig, die Imaginärteile gestrichelt eingezeichnet. Für $k > k_p$ ist $i \frac{dF_B}{d\omega}$ imaginär und unterscheidet sich für ω_+ und ω_- um ein Vorzeichen:

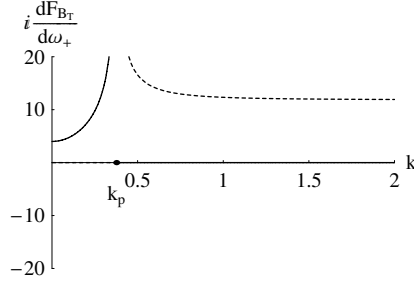


Abbildung 4.22: $i \frac{dF_B}{d\omega_+}$ über k

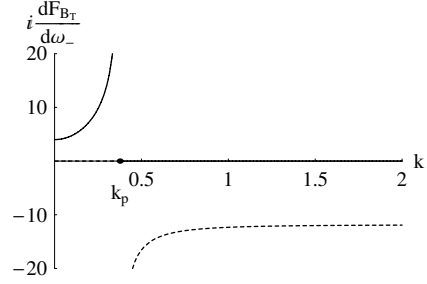


Abbildung 4.23: $i \frac{dF_B}{d\omega_-}$ über k

Der Stabilitätsparameter ist also für beide mögliche Lösungen ω_{\pm} verschieden voneinander:

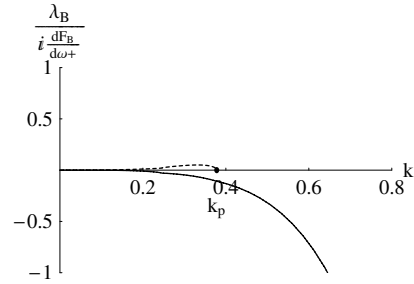


Abbildung 4.24: $\lambda_B / (i \frac{dF_B}{d\omega_+})$ über k

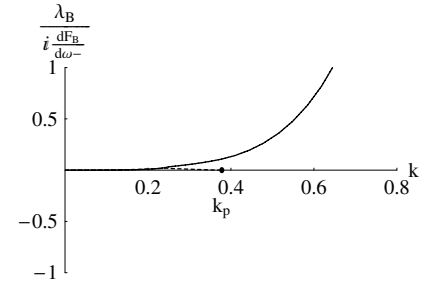


Abbildung 4.25: $\lambda_B / (i \frac{dF_B}{d\omega_-})$ über k

Beide Varianten unterscheiden sich für $k > k_p$ auch nur um ein Vorzeichen. Ein wichtiges Ergebnis ist, dass der Stabilitätsparameter für $k > k_p$ reell wird. In diesem Fall liegen wie bei der Kelvin-Helmholtz-Instabilität ohne Stratifizierung in der ersten Störungsordnung exponentiell abklingende Lösungen vor. Die nichtlineare Stabilitätsanalyse hat dort ebenfalls einen reellen Stabilitätsparameter (3.125) ergeben.

Für $k > k_p$ überwiegen die Effekte durch die Magnetfelder. Ein starkes Magnetfeld verschiebt die Polstelle zum Ursprung hin, so dass die Effekte durch die Dichteschichtung unterdrückt werden. Für verschwindende Dichteschichtung müsste sich die Kelvin-Helmholtz-Instabilität dichtebeständiger Fluide ergeben. Da allerdings die Oberflächenspannung nicht im Modell enthalten ist und die Schwerkraft für das gewählte Beispiel keine Rolle spielt, kann der Grenzfall nicht durchgeführt werden. Die Multiple Skalen Analyse des dichtebeständigen Problems bricht in der zweiten Störungsordnung ab.

Für die in (4.127) angesetzte Modulationswelle

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial k} K + \frac{\lambda_B}{i \frac{dF_{BT}}{d\omega}} |S_1|^2 \quad (4.141)$$

ist der Stabilitätsparameter für $k > k_p$ reell. Eine stromaufwärts bzw. stromabwärts fließende Welle pflanzt sich langsamer fort, da in beiden Fällen der Stabilitätsparameter das entgegengesetzte Vorzeichen des zweiten Terms der Gruppengeschwindigkeit aus (4.99) besitzt. Je größer das Amplitudenquadrat $|S_1|^2$, desto stärker ist der Effekt.

Für $k < k_p$ sind ω_{\pm} keine physikalisch sinnvollen Lösungen für die Stabilitätsanalyse, da sie die Kausalitätsbedingungen nicht erfüllen. Für diesen Bereich kann man die bisher nicht beachtete ω_1 -Lösung (4.52) untersuchen. Diese Lösung erfüllt die Kausalitätsbedingung. Da für diese Lösung in diesem Bereich exponentiell abklingende Störungen vorliegen, ist ein reeller Landaukoeffizient zu erwarten.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

5.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wurde die Kelvin-Helmholtz-Instabilität in magnetohydrodynamischen Strömungen untersucht.

Neben dichtebeständigen Fluiden in drei Raumdimensionen wurden auch dichtegeschichtete Fluide in Boussinesq-Näherung mit konstanten Brunt-Väisälä-Frequenzen in zwei Raumdimensionen analysiert. Die beiden Systeme zeigen in einer linearisierten Theorie unterschiedliches Wellenverhalten. Während dichtebeständige Teilströmungen nur exponentiell abklingende Wellenbewegungen zulassen, können in dichtegeschichteten Fluiden in der verwendeten Näherung von der bewegten Trennfläche Wellen bis ins Unendliche abgestrahlt werden.

Mit der Methode der Multiplen Skalen wurden schwach nichtlineare Effekte untersucht. Die Nichtlinearitäten haben ihren Ursprung allein in den Übergangsbedingungen an der Trennfläche. Die nichtlineare kinematische Übergangsbedingung fordert in den Gleichungen höherer Ordnung höher harmonische Wellenbewegungen der Teilströmungen.

Die Feldgleichungen in den Teilströmungen sind für die relevanten Störungen in den wesentlichen Größen linear. Für dichtebeständige Fluide gilt die Laplace-Gleichung, für dichtegeschichtete Fluide in der verwendeten Näherung eine Boussinesq-Alfvén-Wellengleichung. Der Druck kompensiert in beiden Fällen die Nichtlinearitäten der Felder.

Aus den nichtlinearen dynamischen Übergangsbedingungen höherer Ordnung gewinnt man dann die Bedingungen an die Lösungen.

Besondere Sorgfalt wurde auf die korrekte Behandlung der Übergangsbedingungen an der beweglichen Trennfläche gelegt. Die in diesem Zusammenhang sonst kaum beachteten Übergangsbedingungen an das elektromagnetische Feld wurden hergeleitet. Aus diesen ist ersichtlich, dass für einen stationären Grundzustand kein Magnetfeld senkrecht zur Trennfläche vorgegeben werden darf und bei hinreichend großer elektrischer Leitfähigkeit beider Teilströmungen eine mögliche Trennflächenladung verschwindet. Der elektrische Trennflächenstrom ist durch die Materialeigenschaften der Teilströmungen gegeben und stellt sich bei vorgegebener Auslenkung der Trennfläche ein. Die mit dem Trennflächen-

strom verknüpfte Lorentzkraft erlaubt eine plausible Erklärung für den linearen stabilisierenden Effekt der angelegten Magnetfelder, da sie stets der Auslenkung entgegengesetzt ist.

In dritter Ordnung Störungstheorie führt die Methode der Multiplen Skalen auf ein nichtlineares Gleichungssystem für die Evolution der Amplitude der Wellenbewegungen.

Für dichtebeständige Fluide wurde dieses Gleichungssystem für linear stabile Strömungssysteme weit unterhalb der Neutralitätskurve oder für marginal stabile Strömungssysteme in der Nähe der Neutralitätskurve ausgewertet. Man erhält eine nichtlineare Schrödingergleichung bzw. eine nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung mit reellen Koeffizienten. Die für die Stabilitätsanalyse wichtigen Koeffizienten wurden für ausgezeichnete Fälle ausgewertet und die Wirkung der Magnetfelder diskutiert. Die hergeleiteten allgemeinen Gleichungen für drei Raumdimensionen ergeben in Grenzfällen die bekannten Gleichungen aus der Literatur, wobei auch einige Diskrepanzen aufgetreten sind, siehe Gleichung (3.125) und die folgende Diskussion.

Für dichtegeschichtete Fluide in der verwendeten Näherung wurde für linear stabile zweidimensionale Strömungssysteme eine nichtlineare Landaugleichung mit reellen Koeffizienten hergeleitet und die Wirkung der Magnetfelder für einfache ebene Wellen diskutiert.

In einem Bereich, in dem die Magnetfelder die Effekte der Massendichteschichtungen dominieren, wurde der Stabilitätsparameter reell wie bei der Kelvin-Helmholtz-Instabilität dichtebeständiger Fluide. Dann liegen in beiden Fällen in der linearisierten Theorie exponentiell abklingende Wellenbewegungen vor. In der linearisierten Theorie stabilisiert ein Magnetfeld bekanntermaßen die Strömung. Die betrachteten Evolutionsgleichungen geben eine solche pauschale Aussage nicht her. Für die nichtlinearen Evolutionsgleichungen gibt es mehrere gültige Lösungstypen, deren Eigenschaften in unterschiedlicher Weise von den Magnetfeldern abhängen. Die Wirkung der Magnetfelder ist zudem abhängig von anderen Kennzahlen der Strömungen.

Das Magnetfeld verschiebt nicht nur die Stabilitätsbereiche, sondern beeinflusst auch die Form und die Geschwindigkeit der Lösungen.

5.2 Ausblick

Eine interessante Verallgemeinerung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität für dichtebeständige Fluide ergibt sich, wenn man eine z -Abhängigkeit der vorgegebenen Magnetfelder und Strömungsgeschwindigkeiten des Grundzustands zulässt [1],[65]. Die Feldgleichungen der Teilströmungen sind dann Differentialgleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten. Über die Entwicklung der Übergangsbedingungen an der Trennfläche müssten die Ableitungen der Magnetfelder und Geschwindigkeiten als zusätzliche Parameter Einfluss auf das Wellenverhalten und die Stabilität der Strömung nehmen.

Die Stabilitätsanalyse der dichtegeschichteten Fluide muss vollständiger Weise für alle drei Raumdimensionen durchgeführt werden. Für zwei Raumdimensionen wurde der Spezialfall ohne Dichtesprung an der Trennfläche analysiert. Ein Dichtesprung ergibt in der linearisierten Theorie eine Dispersionsrelation mit komplexen Koeffizienten. Eine genaue Analyse wäre wünschenswert.

Beide Systeme könnten durch die Betrachtung rotierender Fluide wie in [3] und

[4] erweitert werden.

Die hergeleiteten nichtlinearen Evolutionsgleichungen lassen noch weitere hier nicht behandelte bekannte Lösungstypen [66] zu. Die genaue Analyse über die Wirkung der Magnetfelder kann in zukünftigen Arbeiten untersucht werden.

Die Kelvin-Helmholtz-Instabilität kann auch für Fluide mit anderen Eigenschaften untersucht werden. Für magnetische Fluide gibt es bereits zahlreiche Veröffentlichungen, in denen die Methode der Multiplen Skalen angewendet wurde [20],[34],[52] und [84].

Die Magnetohydrodynamik ist aus einer Niederfrequenzapproximation hervorgegangen. Ausgehend von zwei vollständig ionisierten Gasen auf beiden Seiten der Trennfläche kann man mit anderen Annahmen und Näherungen [80] die Kelvin-Helmholtz-Instabilität für andere Frequenzbereiche analysieren.

Um auf den in der Einleitung vorgestellten philosophischen Aphorismus einzugehen, so gibt es im Modell einer idealisierten Strömung Zustände, die alle Zeiten überdauern. Die Methode der Multiplen Skalen zeigt hingegen eindrucksvoll, dass auf größeren Zeitskalen eine konstant erscheinende Größe wie die Amplitude veränderlich ist und auch dem Wandel der Zeit unterliegt.

Anhang A

Sprungbedingungen

Die im Kapitel 2 hergeleiteten Übergangsbedingungen müssen für die Störungstheorie bis zur dritten Ordnung des Entwicklungsparameters ϵ entwickelt werden. Die in den Übergangsbedingungen involvierten physikalischen Größen werden auf der unausgelenkten ebenen Trennfläche $z = 0$ ausgewertet. Die Abweichung durch die Auslenkung $s(x, y, t)$ wird durch Taylor-Entwicklung berücksichtigt. Die Ordnung eines Terms richtet sich nach dem Ansatz der Funktion, der Skala der Koordinaten und des Transports der Übergangsbedingung auf $z = 0$. Der zur Berechnung notwendige normierte Flächenvektor \vec{n} , der senkrecht auf der Trennfläche $s(x, y, t)$ steht, lautet:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} \begin{pmatrix} -s_x \\ -s_y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

A.1 Die mechanischen Übergangsbedingungen

Die kinematische Übergangsbedingung

Die kinematische Übergangsbedingung (2.12) für eine Teilströmung lautet in kartesischen Koordinaten:

$$\left(\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{s} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -s_x \\ -s_y \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Diese Gleichung wird unter der Berücksichtigung der Störungsansätze der Funktionen, der unterschiedlichen Skalen und des Transports der Übergangsbedingung auf die ebene Fläche $z = 0$ entwickelt:

Nullte Störungsordnung:

$$0 = W. \quad (\text{A.3})$$

Erste Störungsordnung:

$$\dot{s}_1 + U s_{1x} + V s_{1y} = w_1. \quad (\text{A.4})$$

Zweite Störungsordnung:

$$\dot{s}_2 + U s_{2x} + V s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} + u_1 s_{1x} + v_1 s_{1y} = w_2 + s_1 w_{1z}. \quad (\text{A.5})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 + U s_{3x} + V s_{3y} + \frac{\partial s_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial s_2}{\partial X_1} + V \frac{\partial s_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial s_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial s_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial s_1}{\partial Y_2} \\ + u_1 s_{2x} + u_1 \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + u_2 s_{1x} + s_1 u_{1z} s_{1x} + v_1 s_{2y} + v_1 \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} + v_2 s_{1y} + s_1 v_{1z} s_{1y} \\ = w_3 + s_2 w_{1z} + s_1 w_{2z} + \frac{1}{2} s_1 w_{1zz}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Die kinematischen Übergangsbedingungen gelten für beide Teilströmungen. Man sie zusammenfassend auch mit Sprungklammern schreiben. In dieser Form zeigt sich die gleiche Struktur wie die der Stetigkeitsbedingung an die Normalkomponente der magnetischen Induktion. Über die Induktionsgleichungen kann man die unabhängig voneinander geforderten Bedingungen ineinander überführen:

$$||W|| = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$||w_1|| = ||U|| s_{1x} + ||V|| s_{1y}, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} ||w_2|| + s_1 ||w_{1z}|| = \\ ||U|| \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) + ||u_1|| s_{1x} + ||V|| \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) + ||v_1|| s_{1y}, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} ||w_3|| + s_2 ||w_{1z}|| + s_1 ||w_{2z}|| + \frac{1}{2} s_1 ||w_{1zz}|| = \\ ||U|| \left(s_{3x} + \frac{\partial s_2}{\partial X_1} + \frac{\partial s_1}{\partial X_2} \right) + ||u_1|| \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) + (||u_2|| + s_1 ||u_{1z}||) s_{1x} \\ + ||V|| \left(s_{3y} + \frac{\partial s_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_2} \right) + ||v_1|| \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) + (||v_2|| + s_1 ||v_{1z}||) s_{1y}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ersetzt man in den letzten vier Gleichungen die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten durch diejenigen der magnetischen Induktion, erhält man die Bedingungen an die Normalkomponenten der Induktion (A.43) bis (A.46).

Die dynamische Übergangsbedingung

Die Spannungstensoren im Rahmen des MHD-Modells lauten in den verwendeten kartesischen Koordinaten:

$$p \mathbf{I} + \mathbf{T} = \begin{pmatrix} p + \frac{-a^2+b^2+c^2}{2\mu} & -\frac{ab}{\mu} & -\frac{ac}{\mu} \\ -\frac{ab}{\mu} & p + \frac{a^2-b^2+c^2}{2\mu} & -\frac{bc}{\mu} \\ -\frac{ac}{\mu} & -\frac{bc}{\mu} & p + \frac{a^2+b^2-c^2}{2\mu} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Der negative Gradient angewendet auf die Spannungstensoren ergibt die rechte Seite der Impulsbilanzen. In einer reibungsfreien Theorie gilt für die Normalkomponente des Drucks:

$$\vec{n} \cdot \|p \mathbf{I} + \mathbf{T}\| \cdot \vec{n} = T_\sigma \frac{s_{xx}(1 + s_y^2) - 2s_x s_y s_{xy} + s_{yy}(1 + s_x^2)}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}^3}. \quad (\text{A.12})$$

Die Differenz der angreifenden Druckkräfte ist gleich der auf der Trennfläche wirkenden Spannungen, in unserem Fall die Oberflächenspannung. Die linke Seite ist:

$$\begin{aligned} & \vec{n} \cdot \|p \mathbf{I} + \mathbf{T}\| \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{1 + s_x^2 + s_y^2} \left\{ \underbrace{\|p + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\mu}\|}_{1.} \underbrace{- 2s_x s_y \left\| \frac{ab}{\mu} \right\| + 2s_x \left\| \frac{ac}{\mu} \right\| + 2s_y \left\| \frac{bc}{\mu} \right\|}_{2.} \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{s_x^2 \|p + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\mu}\| + s_y^2 \|p + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\mu}\|}_{3.} \right\}. \quad (\text{A.13}) \end{aligned}$$

Die gesamte Druckbilanz setzt sich aus mehreren Teilen zusammen. Um den Überblick zu wahren, werden die einzelnen Summanden nacheinander entwickelt. Der von der Normierung stammende Vorfaktor $\frac{1}{1 + s_x^2 + s_y^2} \approx 1 - (s_x^2 + s_y^2)$ muss beim ersten Teil berücksichtigt werden:

$$\{1 - (s_x^2 + s_y^2)\} \left\| p + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\mu} \right\|.$$

Nullte Störungsordnung:

$$\left\| P + \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\|. \quad (\text{A.14})$$

Erste Störungsordnung:

$$\left\| p_1 + \frac{A}{\mu} a_1 + \frac{B}{\mu} b_1 \right\|. \quad (\text{A.15})$$

Zweite Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & \left\| p_2 + \frac{A}{\mu} a_2 + \frac{B}{\mu} b_2 + \frac{a_1^2}{2\mu} + \frac{b_1^2}{2\mu} - \frac{c_1^2}{2\mu} \right\| - s_1 \left\| p_{1z} + \frac{A}{\mu} a_{1z} + \frac{B}{\mu} b_{1z} \right\| \\ & - (s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \left\| P + \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\|. \quad (\text{A.16}) \end{aligned}$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & \left\| p_3 + \frac{A}{\mu} a_3 + \frac{B}{\mu} b_3 + \frac{1}{\mu} (a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2) \right\| \\ & + s_1 \left\| p_{2z} + \frac{A}{\mu} a_{2z} + \frac{B}{\mu} b_{2z} + \frac{1}{\mu} (a_1 a_{1z} + b_1 b_{1z} - c_1 c_{1z}) \right\| + s_2 \left\| p_{1z} + \frac{A}{\mu} a_{1z} + \frac{B}{\mu} b_{1z} \right\| \\ & + \frac{1}{2} s_1^2 \left\| p_{1zz} + \frac{A}{\mu} a_{1zz} + \frac{B}{\mu} b_{1zz} \right\| - (s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \left\| p_1 + \frac{A}{\mu} a_1 + \frac{B}{\mu} b_1 \right\|. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Der zweite und dritte Summand tragen erst ab der zweiten Ordnung zur Störungsrechnung bei. Der Vorfaktor spielt dann erst ab der vierten Ordnung eine Rolle und wird daher nicht berücksichtigt:

$$-2s_x s_y \left\| \frac{ab}{\mu} \right\| + 2s_x \left\| \frac{ac}{\mu} \right\| + 2s_y \left\| \frac{bc}{\mu} \right\|.$$

Zweite Störungsordnung:

$$-2s_{1x}s_{1y} \left\| \frac{AB}{\mu} \right\| + 2s_{1x} \left\| \frac{A}{\mu} c_1 \right\| + 2s_{1y} \left\| \frac{B}{\mu} c_1 \right\|. \quad (\text{A.18})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & -2 \left(\frac{\partial s_1}{\partial X_1} s_{1y} + s_{1x} \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) \left\| \frac{AB}{\mu} \right\| - 2s_{1x}s_{1y} \left(\left\| \frac{a_1 B}{\mu} \right\| + \left\| \frac{Ab_1}{\mu} \right\| \right) \\ & + 2 \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \left\| \frac{A}{\mu} c_1 \right\| + 2s_{1x}s_{1x} \left\| \frac{A}{\mu} c_1 z \right\| + 2s_{1x} \left\| \frac{A}{\mu} c_2 \right\| + 2s_{1x} \left\| \frac{a_1}{\mu} c_1 \right\| \\ & + 2 \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \left\| \frac{B}{\mu} c_1 \right\| + 2s_{1y}s_{1y} \left\| \frac{B}{\mu} c_1 z \right\| + 2s_{1y} \left\| \frac{B}{\mu} c_2 \right\| + 2s_{1y} \left\| \frac{b_1}{\mu} c_1 \right\|. \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

Im letzten Summanden gehen die magnetischen Drücke mit veränderten Vorzeichen ein:

$$s_x^2 \left\| p + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2\mu} \right\| + s_y^2 \left\| p + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2\mu} \right\|.$$

Zweite Störungsordnung:

$$s_{1x}^2 \left\| P - \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\| + s_{1y}^2 \left\| P + \frac{A^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \right\|. \quad (\text{A.20})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & 2 \left(s_{1x} \frac{\partial s_1}{\partial X_1} + s_{1x}s_{2x} \right) \left\| P - \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu} \right\| + s_{1x}^2 \left\| p_1 - \frac{A}{\mu} a_1 + \frac{B}{\mu} b_1 \right\| \\ & + 2 \left(s_{1y} \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} + s_{1y}s_{2y} \right) \left\| P + \frac{A^2}{2\mu} - \frac{B^2}{2\mu} \right\| + s_{1y}^2 \left\| p_1 + \frac{A}{\mu} a_1 - \frac{B}{\mu} b_1 \right\|. \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

Man kann sich die Arbeit der letzten beiden Seiten ersparen, indem man aus dem Maxwellspannungstensor einen kugelsymmetrischen Anteil abspaltet:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{a^2+b^2+c^2}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2+b^2+c^2}{2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2+c^2}{2\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{a^2}{\mu} & \frac{ab}{\mu} & \frac{bc}{\mu} \\ \frac{ab}{\mu} & \frac{b^2}{\mu} & \frac{bc}{\mu} \\ \frac{ac}{\mu} & \frac{bc}{\mu} & \frac{c^2}{\mu} \end{pmatrix} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \mathbf{I} - \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu}. \quad (\text{A.22})$$

Die magnetischen Terme des Maxwellspannungstensors sind dann in den magnetischen Druck $\frac{\vec{B}^2}{2\mu}$ und die magnetischen Schubspannungen $-\frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu}$ aufgeteilt. Bei der Berechnung der dynamischen Übergangsbedingung kann die Übergangsbedingung an die Normalkomponente des magnetischen Feldes verwendet werden:

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu} \mathbf{I} - \frac{\vec{B} \otimes \vec{B}}{\mu} \right) \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu} \mathbf{I} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu} \vec{n}^2 = \frac{\vec{B}^2}{2\mu}. \quad (\text{A.23})$$

Nur der magnetische Druck trägt zur dynamischen Übergangsbedingung bei. Da der magnetische Druck kugelsymmetrisch ist, entfällt der Beitrag des Normalenvektors. Der zu entwickelnde Term lautet:

$$\|p + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\mu}\|.$$

Nullte Störungsordnung:

$$\|P + \frac{A^2}{2\mu} + \frac{B^2}{2\mu}\|. \quad (\text{A.24})$$

Erste Störungsordnung:

$$\|p_1 + \frac{A}{\mu}a_1 + \frac{B}{\mu}b_1\|. \quad (\text{A.25})$$

Zweite Störungsordnung:

$$\|p_2 + \frac{A}{\mu}a_2 + \frac{B}{\mu}b_2 + \frac{1}{2\mu}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\| + s_1\|p_{1z} + \frac{A}{\mu}a_{1z} + \frac{B}{\mu}b_{1z}\|. \quad (\text{A.26})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} &\|p_3 + \frac{A}{\mu}a_3 + \frac{B}{\mu}b_3\| + s_1\|p_{2z} + \frac{A}{\mu}a_{2z} + \frac{B}{\mu}b_{2z}\| + s_2\|p_{1z} + \frac{A}{\mu}a_{1z} + \frac{B}{\mu}b_{1z}\| \\ &+ \frac{1}{2}s_1^2\|p_{1zz} + \frac{A}{\mu}a_{1zz} + \frac{B}{\mu}b_{1zz}\| + \|\frac{1}{\mu}(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)\| \\ &+ s_1\|\frac{1}{\mu}(a_1a_{1z} + b_1b_{1z} + c_1c_{1z})\|. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Zur vollständigen Entwicklung der dynamischen Übergangsbedingung fehlen noch die Oberflächenspannung und der Einfluss der Schwerkraft. Die Oberflächenspannung kann bei kleiner Auslenkung der Trennfläche $s(x, y, t)$ nach dieser entwickelt werden:

$$\begin{aligned} T_\sigma \frac{s_{xx}(1 + s_y^2) - 2s_x s_y s_{xy} + s_{yy}(1 + s_x^2)}{(1 + s_x^2 + s_y^2)^{3/2}} \approx \\ T_\sigma \{s_{xx}(1 + s_y^2) - 2s_x s_y s_{xy} + s_{yy}(1 + s_x^2)\} \left\{1 - \frac{3}{2}(s_x^2 + s_y^2) + \dots\right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Die Oberflächenspannung liefert Beiträge zur Druckbilanz ab der ersten Störungsordnung.

Erste Störungsordnung:

$$T_\sigma (s_{1xx} + s_{1yy}). \quad (\text{A.29})$$

Zweite Störungsordnung:

$$T_\sigma (s_{2xx} + s_{2yy}) + 2T_\sigma \left(\frac{\partial s_{1x}}{\partial X_1} + \frac{\partial s_{1y}}{\partial Y_1} \right). \quad (\text{A.30})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} &T_\sigma (s_{3xx} + s_{3yy}) + 2T_\sigma \left(\frac{\partial s_{2x}}{\partial X_1} + \frac{\partial s_{2y}}{\partial Y_1} + \frac{\partial s_{1x}}{\partial X_2} + \frac{\partial s_{1y}}{\partial Y_2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s_1}{\partial X_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s_1}{\partial Y_1^2} \right) \\ &+ T_\sigma \left\{ s_{1xx}s_{1y}^2 - 2s_{1x}s_{1y}s_{1xy} + s_{1yy}s_{1x}^2 - \frac{3}{2}(s_{1xx} + s_{1yy})(s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Weissman hat eine andere Definition der Krümmung verwendet, die sich nicht auf das Ergebnis auswirkt, da sich die zusätzlichen Terme in der dritten Ordnung gegenseitig aufheben.

Die Wirkung der Schwerkraft auf die Trennfläche in den höheren Ordnungen wird aus der Druckverteilung des Grundzustands bestimmt. Für dichtebeständige Fluide ist die Druckverteilung in den Teilströmungen linear in z :

$$P_1 = -\rho_1 g z, \quad P_2 = -\rho_2 g z. \quad (\text{A.32})$$

In die dynamische Übergangsbedingung geht die Differenz dieser Beiträge ein:

$$P_2 - P_1 = -g(\rho_2 - \rho_1)z. \quad (\text{A.33})$$

Der Beitrag der Schwerkraft ist nur proportional zur Auslenkung der Trennfläche und hängt nicht etwa von der Neigung der Trennfläche ab, da der mechanische Druck kugelsymmetrisch ist und in alle Richtungen gleich groß ist.

Erste Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_1. \quad (\text{A.34})$$

Zweite Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_2. \quad (\text{A.35})$$

Dritte Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_3. \quad (\text{A.36})$$

Für Fluide, die einen Dichtegradienten senkrecht zur Trennfläche aufweisen, muss die Dichteänderung bei der Berechnung berücksichtigt werden. Gilt die Boussinesq-Näherung mit konstanten Brunt-Väisälä-Frequenzen, ist eine stabile Druckverteilung des Grundzustands mit zunehmender Höhe exponentiell abklingend:

$$P_1 = \frac{\rho_1}{\kappa_{B_1}} g e^{-\kappa_{B_1} z}, \quad P_2 = \frac{\rho_2}{\kappa_{B_2}} g e^{-\kappa_{B_2} z}. \quad (\text{A.37})$$

Dabei gilt der Zusammenhang $g\kappa_{B_1} = N_1^2$ und $g\kappa_{B_2} = N_2^2$. In die dynamische Übergangsbedingung geht die Differenz dieser Beiträge ein:

$$P_2 - P_1 = g\left(\frac{\rho_2}{\kappa_{B_2}} e^{-\kappa_{B_2} z} - \frac{\rho_1}{\kappa_{B_1}} e^{-\kappa_{B_1} z}\right). \quad (\text{A.38})$$

Für die höheren Störungsordnung wird diese Differenz an der Stelle $z = s_1 + s_2 + s_3 + \dots$ entwickelt:

Erste Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_1. \quad (\text{A.39})$$

Zweite Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_2 + \frac{1}{2}||N^2\rho||s_1^2. \quad (\text{A.40})$$

Dritte Störungsordnung:

$$-g||\rho||s_3 + ||N^2\rho||s_1 s_2 - \frac{1}{6}||\frac{N^4}{g}\rho||s_1^3. \quad (\text{A.41})$$

Für den in Kapitel 4 behandelten Fall gleicher Dichten und gleicher Brunt-Väisälä-Frequenzen entfallen die Beiträge durch die Schwerkraft in allen Störungsordnungen.

A.2 Die elektromagnetischen Übergangsbedingungen

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion

Die Normalkomponente der magnetischen Induktion geht stetig durch die Trennfläche:

$$||\vec{B}|| \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} (||c|| - ||a||s_x - ||b||s_y) = 0. \quad (\text{A.42})$$

Nullte Störungsordnung:

$$||C|| = 0. \quad (\text{A.43})$$

Erste Störungsordnung:

$$||c_1|| - ||A||s_{1x} - ||B||s_{1y} = 0. \quad (\text{A.44})$$

Zweite Störungsordnung:

$$||c_2|| + s_1||c_{1z}|| - ||A|| \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) - ||a_1||s_{1x} - ||B|| \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) - ||b_1||s_{1y} = 0. \quad (\text{A.45})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & ||c_3|| + s_1||c_{2z}|| + s_2||c_{1z}|| + \frac{1}{2}s_1^2||c_{1zz}|| \\ & - ||A|| \left(s_{3x} + \frac{\partial s_2}{\partial X_1} + \frac{\partial s_1}{\partial X_2} \right) - ||a_1|| \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) - ||a_2||s_{1x} + s_1||a_{1z}||s_{1x} \\ & - ||B|| \left(s_{3y} + \frac{\partial s_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_2} \right) - ||b_1|| \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) - ||b_2||s_{1y} + s_1||b_{1z}||s_{1y} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

In den letzten beiden Störungsordnungen verschwinden Terme, die aus der Entwicklung des Normierungsfaktors stammen. Es gilt $(s_{1x}^2 + s_{1y}^2)||C|| = 0$ und $(s_{1x}^2 + s_{1y}^2)(||c_1|| - ||A||s_{1x} - ||B||s_{1y}) = 0$. Die von der kinematischen Übergangsbedingung herrührenden Gleichungen sind identisch mit den oben entwickelten. Zum Vergleich die kinematische und magnetische Sprungbedingung in erster Störungsordnung:

$$||w_1|| - ||U||s_{1x} - ||V||s_{1y} = 0, \quad (\text{A.47})$$

$$||c_1|| - ||A||s_{1x} - ||B||s_{1y} = 0. \quad (\text{A.48})$$

Durch die Anwendung der substantiellen Zeitableitung auf die Sprungbedingung erhält man die Induktionsgleichung für beide Teilströmungen:

$$\begin{aligned} & (\partial_t + U\partial_x + V\partial_y)(c_1 - s_{1x}A - s_{1y}B) \\ & = (-w_{1x}A - w_{1y}B + Aw_{1x} + Bw_{1y}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

Die Normalkomponente des elektrischen Feldes

Im Grenzfall idealer elektrischer Leiter existieren keine Oberflächenladungen in der Trennfläche:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{\epsilon}{\sigma} \vec{j} = \frac{\epsilon}{\sigma} \nabla \times \vec{H}. \quad (\text{A.50})$$

Der Vollständigkeit halber sind hier trotzdem die Entwicklungen durchgeführt worden:

$$\left\| \frac{\epsilon}{\sigma} \nabla \times \vec{H} \right\| \cdot \vec{n} = \frac{\left\| \frac{\epsilon}{\sigma \mu} \{ (c_y - b_z) s_x + (-c_x + a_z) s_y + b_x - a_y \} \right\|}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} = \sigma. \quad (\text{A.51})$$

Nullte Störungsordnung:

$$0 = \Sigma. \quad (\text{A.52})$$

Erste Störungsordnung:

$$\left\| \frac{\epsilon}{\sigma \mu} (b_{1x} - a_{1y}) \right\| = \sigma_1. \quad (\text{A.53})$$

Zweite Störungsordnung:

$$\left\| \frac{\epsilon}{\sigma \mu} \{ (c_{1y} - b_{1z}) s_{1x} + (a_{1z} - c_{1x}) s_{1y} + b_{2x} - a_{2y} + \frac{\partial b_1}{\partial X_1} - \frac{\partial a_1}{\partial Y_1} + s_1 (b_{1xz} - a_{1yz}) \} \right\| = \sigma_2. \quad (\text{A.54})$$

Dritte Störungsordnung:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\epsilon}{\sigma \mu} \left\{ \left(c_{2y} - b_{2z} + \frac{\partial c_1}{\partial Y_1} - \frac{\partial b_1}{\partial Z_1} + s_1 (c_{1yz} - b_{1zz}) \right) s_{1x} + (c_{1y} - b_{1z}) \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) \right. \right. \\ & + \left(a_{2z} - c_{2x} + \frac{\partial a_1 z}{\partial Z_1} - \frac{\partial c_1 x}{\partial X_1} + s_1 (a_{1zz} - c_{1xz}) \right) s_{1y} + (a_{1z} - c_{1x}) \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) \\ & + b_{3x} - a_{3y} + s_1 (b_{2xz} - a_{2yz}) + s_2 (b_{1xz} - a_{1yz}) + \frac{1}{2} s_1^2 (b_{1xzz} - a_{1yzz}) \\ & \left. \left. + \frac{\partial b_2}{\partial X_1} - \frac{\partial a_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial b_1}{\partial X_2} - \frac{\partial a_1}{\partial Y_2} + s_1 \left(\frac{\partial b_{1z}}{\partial X_1} - \frac{\partial a_{1z}}{\partial Y_1} \right) \right\} \right\| - \frac{1}{2} (s_{1x}^2 + s_{1y}^2) \sigma_1 = \sigma_3. \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes

Das elektrische Feld ist vom Bewegungszustand des Beobachters abhängig. Für ideale Leiter verschwindet das elektrische Feld in ihrem Ruhesystem. Für einen Beobachter im Laborsystem ist das elektrische Feld über eine Galilei-Transformation (1.44) gegeben. Die Übergangsbedingung an die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes lautet im verwendeten kartesischen Koordinatensystem:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} \left\{ \begin{pmatrix} \|aw - cu\| + s_y \|bu - av\| \\ -\|cv - bw\| - s_x \|ub - av\| \\ s_x \|aw - cu\| - s_y \|cv - bw\| \end{pmatrix} - \dot{s} \begin{pmatrix} \|a\| \\ \|b\| \\ \|c\| \end{pmatrix} \right\} = \vec{0}. \quad (\text{A.56})$$

Die x- und y-Komponente der Übergangsbedingungen sind sich strukturell ähnlich. Sie lauten in den ersten beiden Störungsordnungen:
Nullte Störungsordnung:

$$||AW - CU|| = 0, \quad (\text{A.57})$$

$$||CV - BW|| = 0. \quad (\text{A.58})$$

Erste Störungsordnung:

$$||Aw_1 - c_1U|| + s_{1y}||BU - AV|| - \dot{s}_1||A|| = 0, \quad (\text{A.59})$$

$$-||c_1V - Bw_1|| - s_{1x}||BU - AV|| - \dot{s}_1||B|| = 0. \quad (\text{A.60})$$

Die Bedingungen nullter Ordnung werden mit $W = C = 0$ trivialerweise erfüllt und schränken die möglichen stationären Grundzustände ein.

Die Sprungbedingungen erster Ordnung sind dann trivialerweise erfüllt, da eine Differenz von zwei Induktionsgleichungen vorliegt. Um das zu sehen, wendet man die substantielle Zeitableitung an:

$$\begin{aligned} &(\partial_t + U\partial_x + V\partial_y) \{Aw_1 - c_1U + s_{1y}(BU - AV) - \dot{s}_1A\} \\ &= A\dot{w}_1 + AUw_{1x} + AVw_{1y} \\ &- AUw_{1x} - BUw_{1y} + w_{1y}(BU - AV) - \dot{w}_1A = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Im vorletzten Schritt wurde die Induktionsgleichung und die kinematische Übergangsbedingung verwendet. Entsprechend verfährt man mit der y-Komponente der Übergangsbedingung. Jede weitere Sprungbedingung höherer Ordnung ist eine Entwicklung der Feldgleichungen und deshalb trivialerweise erfüllt.

Der erste nichtverschwindende Term der z-Komponente ist eine Gleichung zweiter Ordnung. Auch hier verschwinden die einzelnen Summanden bei Berücksichtigung der Induktionsgleichung und kinematischer Übergangsbedingung:

$$\begin{aligned} &\{s_{1x}(-Uc_1 + Aw_1) - s_{1y}(Vc_1 - Bw_1) - \dot{s}_1c_1\} \\ &= -c_1(\dot{s}_1 + Us_{1x} + Vs_{1y}) + w_1(As_{1x} + Bs_{1y}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Die Tangentialkomponente des Magnetfeldes

Mit dieser Übergangsbedingung wird der Oberflächenstrom \vec{j}_T bestimmt:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + s_x^2 + s_y^2}} \left\{ \begin{pmatrix} -s_y||\frac{c}{\mu}|| - ||\frac{b}{\mu}|| \\ s_x||\frac{c}{\mu}|| + ||\frac{a}{\mu}|| \\ s_y||\frac{a}{\mu}|| - s_x||\frac{b}{\mu}|| \end{pmatrix} + \dot{s} \begin{pmatrix} ||\frac{\epsilon}{\mu\sigma}(c_y - b_z)|| \\ ||\frac{\epsilon}{\mu\sigma}(a_z - c_x)|| \\ ||\frac{\epsilon}{\mu\sigma}(b_x - a_y)|| \end{pmatrix} \right\} = \vec{j}_T. \quad (\text{A.63})$$

Hier wird er bis zur zweiten Ordnung berechnet.

Nullte Störungsordnung:

$$\vec{j}_T = \begin{pmatrix} -||\frac{B}{\mu}|| \\ ||\frac{A}{\mu}|| \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.64})$$

Erste Störungsordnung:

$$\vec{j}_{1T} = \begin{pmatrix} -||\frac{b_1}{\mu}|| \\ ||\frac{a_1}{\mu}|| \\ s_{1y}||\frac{A}{\mu}|| - s_{1x}||\frac{B}{\mu}|| + \dot{s}_1\Sigma \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

Zweite Störungsordnung:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{2T} = & \begin{pmatrix} -\left\| \frac{b_2}{\mu} \right\| - s_1 \left\| \frac{b_{1z}}{\mu} \right\| + \frac{1}{2} (s_{1xx} + s_{1yy}) \left\| \frac{B}{\mu} \right\| + \dot{s}_1 \left\| \frac{\epsilon}{\mu\sigma} (c_{1y} - b_{1z}) \right\| \\ \left\| \frac{a_2}{\mu} \right\| + s_1 \left\| \frac{a_{1z}}{\mu} \right\| - \frac{1}{2} (s_{1xx} + s_{1yy}) \left\| \frac{A}{\mu} \right\| + \dot{s}_1 \left\| \frac{\epsilon}{\mu\sigma} (a_{1z} - c_{1x}) \right\| \\ \left(s_{2y} + \frac{\partial s_1}{\partial Y_1} \right) \left\| \frac{A}{\mu} \right\| + s_{1y} \left\| \frac{a_1}{\mu} \right\| - \left(s_{2x} + \frac{\partial s_1}{\partial X_1} \right) \left\| \frac{B}{\mu} \right\| - s_{1x} \left\| \frac{b_1}{\mu} \right\| \end{pmatrix} \\ & + \left\{ \left(\dot{s}_2 + \frac{\partial s_1}{\partial T_1} \right) \Sigma + \dot{s}_1 \sigma_1 \right\} \vec{e}_z. \quad (\text{A.66}) \end{aligned}$$

Der Oberflächenstrom \vec{j}_T besitzt eine z -Komponente, da die Trennfläche gekrümmt ist. Eventuelle Oberflächenladungen liefern Beiträge durch die Bewegung der Trennfläche.

Anhang B

Die Feldgrößen der Teilströmungen

B.1 Feldgleichungen dichtebeständiger Fluide

Die Feldgleichungen erster Ordnung

Die Impulsbilanzen und Induktionsgleichungen lauten in den einzelnen kartesischen Komponenten:

$$\dot{u}_1 + U u_{1x} + V u_{1y} = -\frac{1}{\rho} p_{1x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\dot{v}_1 + U v_{1x} + V v_{1y} = -\frac{1}{\rho} p_{1y}, \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{w}_1 + U w_{1x} + V w_{1y} = -\frac{1}{\rho} p_{1z}, \quad (\text{B.3})$$

$$\dot{a}_1 + U a_{1x} + V a_{1y} = A u_{1x} + B u_{1y}, \quad (\text{B.4})$$

$$\dot{b}_1 + U b_{1x} + V b_{1y} = A v_{1x} + B v_{1y}, \quad (\text{B.5})$$

$$\dot{c}_1 + U c_{1x} + V c_{1y} = A w_{1x} + B w_{1y}. \quad (\text{B.6})$$

Mit den Potentialen für das Geschwindigkeitsfeld ϕ_1 und der magnetischen Induktion ψ_1 kann man die Gleichungen erster Ordnung in kompakter Weise darstellen:

$$(\partial_t + U \partial_x + V \partial_y) \phi_1 = \frac{1}{\rho} p_1, \quad (\text{B.7})$$

$$(\partial_t + U \partial_x + V \partial_y) \psi_1 = (A \partial_x + B \partial_y) \phi_1. \quad (\text{B.8})$$

Die Feldgleichungen zweiter Ordnung

$$\dot{u}_2 + U u_{2x} + V u_{2y} + \frac{\partial u_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} = -\frac{1}{\rho} p_{2x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial X_1}, \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{v}_2 + U v_{2x} + V v_{2y} + \frac{\partial v_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} = -\frac{1}{\rho} p_{2y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial Y_1}, \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_2 + U w_{2x} + V w_{2y} + \frac{\partial w_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial w_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial w_1}{\partial Y_1} \\ + (u_1 w_{1x} + v_1 w_{1y} + w_1 w_{1z}) = -\frac{1}{\rho} p_{2z}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{a}_2 + U a_{2x} + V a_{2y} + \frac{\partial a_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial a_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial a_1}{\partial Y_1} = A u_{2x} + B u_{2y} + A \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial u_1}{\partial Y_1}, \quad (\text{B.12})$$

$$\dot{b}_2 + U b_{2x} + V b_{2y} + \frac{\partial b_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial b_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial b_1}{\partial Y_1} = A v_{2x} + B v_{2y} + A \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial v_1}{\partial Y_1}, \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{c}_2 + U c_{2x} + V c_{2y} + \frac{\partial c_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial c_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial c_1}{\partial Y_1} = A w_{2x} + B w_{2y} + A \frac{\partial w_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial w_1}{\partial Y_1}. \quad (\text{B.14})$$

Die Feldgleichungen dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{u}_3 + U u_{3x} + V u_{3y} + \frac{\partial u_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + V \frac{\partial u_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial u_1}{\partial Y_2} \\ + u_1 u_{2x} + v_1 u_{2y} + w_1 u_{2z} + u_2 u_{1x} + v_2 u_{1y} + w_2 u_{1z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \\ = -\frac{1}{\rho} p_{3x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial X_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial X_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_3 + U v_{3x} + V v_{3y} + \frac{\partial v_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial v_2}{\partial X_1} + V \frac{\partial v_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial v_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial v_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial v_1}{\partial Y_2} \\ + u_1 v_{2x} + u_1 v_{2y} + u_1 v_{2z} + u_2 v_{1x} + u_2 v_{1y} + u_2 v_{1z} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} \\ = -\frac{1}{\rho} p_{3y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_2}{\partial Y_1} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial Y_2}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_3 + U w_{3x} + V w_{3y} + \frac{\partial w_2}{\partial T_1} + U \frac{\partial w_2}{\partial X_1} + V \frac{\partial w_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial w_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial w_1}{\partial Y_2} \\ + u_1 w_{2x} + u_1 w_{2y} + u_1 w_{2z} + u_2 w_{1x} + u_2 w_{1y} + u_2 w_{1z} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial Y_1} \\ = -\frac{1}{\rho} p_{3z}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_3 + Ua_{3x} + Va_{3y} + \frac{\partial a_2}{\partial T_1} + U\frac{\partial a_2}{\partial X_1} + V\frac{\partial a_2}{\partial Y_1} + \frac{\partial a_1}{\partial T_2} + U\frac{\partial a_1}{\partial X_2} + V\frac{\partial a_1}{\partial Y_2} \\ = Au_{3x} + Bu_{3y} + A\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + B\frac{\partial u_2}{\partial Y_1} + A\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + B\frac{\partial u_1}{\partial Y_2}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Die Induktionsgleichungen in y - und z -Richtung erhält man, indem man a und u durch die jeweiligen Induktions- und Geschwindigkeitsfeldkomponenten ersetzt.

nichtlineare Terme in den Feldgleichungen

In den Feldgleichungen zweiter Ordnung ergibt nur der konvektive Anteil der Beschleunigung in der z -Komponente der Impulsbilanz einen nichtlinearen Term:

$$u_1 w_{1x} + v_1 w_{1y} + w_1 w_{1z} = \mp 4\kappa (-\omega + Uk + Vl)^2 |S_1|^2 e^{\mp 2\kappa z}. \quad (\text{B.19})$$

Für die obere Teilströmung gilt das obere Vorzeichen und die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten $U = U_1$ und $V = V_1$, für die untere Teilströmung das untere Vorzeichen und $U = U_2$ und $V = V_2$. In den Induktionsgleichungen heben sich die nichtlinearen Terme gegenseitig auf. Als Veranschaulichung dienen hier die nichtlinearen Terme der Induktionsgleichung in z -Richtung:

$$u_1 c_{1x} + v_1 c_{1y} + w_1 c_{1z} = \mp 4\kappa (Ak + Bl) (-\omega + Uk + Vl) |S_1|^2 e^{\mp 2\kappa z}, \quad (\text{B.20})$$

$$a_1 w_{1x} + b_1 w_{1y} + c_1 w_{1z} = \mp 4\kappa (Ak + Bl) (-\omega + Uk + Vl) |S_1|^2 e^{\mp 2\kappa z}. \quad (\text{B.21})$$

Die nichtlinearen Terme aus dem konvektiven Anteil der Beschleunigung in den Feldgleichungen dritter Ordnung lauten:

$$\begin{aligned} u_1 u_{2x} + v_1 u_{2y} + w_1 u_{2z} + u_2 u_{1x} + v_2 u_{1y} + w_2 u_{1z} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial Y_1} \\ = 4ik (-\omega + Uk + Vl)^2 S_1^* (\kappa S_1^2 + S_2) e^{i\varphi} e^{\mp 3\kappa z} \\ \mp 2\kappa (-\omega + Uk + Vl)^2 S_1 \frac{\partial S_1^*}{\partial X_1} e^{\mp 2\kappa z} + c.c., \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

$$\begin{aligned} u_1 v_{2x} + u_1 v_{2y} + u_1 v_{2z} + u_2 v_{1x} + u_2 v_{1y} + u_2 v_{1z} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial Y_1} \\ = 4il (-\omega + Uk + Vl)^2 S_1^* (\kappa S_1^2 + S_2) e^{i\varphi} e^{\mp 3\kappa z} \\ \mp 2\kappa (-\omega + Uk + Vl)^2 S_1 \frac{\partial S_1^*}{\partial Y_1} e^{\mp 2\kappa z} + c.c., \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} u_1 w_{2x} + u_1 w_{2y} + u_1 w_{2z} + u_2 w_{1x} + u_2 w_{1y} + u_2 w_{1z} + u_1 \frac{\partial w_1}{\partial X_1} + v_1 \frac{\partial w_1}{\partial Y_1} \\ = \mp 12\kappa^2 (-\omega + Uk + Vl)^2 |S_1|^2 S_1 e^{i\varphi} e^{\mp 3\kappa z} - 4ik (-\omega + Uk + Vl) e^{\mp 2\kappa z} S_1 \frac{\partial S_1^*}{\partial T_1} \\ 2i (-\omega + Uk + Vl) e^{\mp 2\kappa z} S_1 \left\{ \left(2kz \mp \frac{k}{\kappa} \right) (-\omega + Uk + Vl) \mp 2\kappa U \right\} \frac{\partial S_1^*}{\partial X_1} \\ 2i (-\omega + Uk + Vl) e^{\mp 2\kappa z} S_1 \left\{ \left(2lz \mp \frac{l}{\kappa} \right) (-\omega + Uk + Vl) \mp 2\kappa V \right\} \frac{\partial S_1^*}{\partial Y_1} + c.c. . \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

B.2 Die Feldgrößen der inkompressiblen Teilströmungen

Die Feldgrößen erster Ordnung

$$u_1^{(1)} = (-\omega + U_1 k + V_1 l) \frac{k}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.25})$$

$$v_1^{(1)} = (-\omega + U_1 k + V_1 l) \frac{l}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.26})$$

$$w_1^{(1)} = i(-\omega + U_1 k + V_1 l) S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.27})$$

$$a_1^{(1)} = (A_1 k + B_1 l) \frac{k}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.28})$$

$$b_1^{(1)} = (A_1 k + B_1 l) \frac{l}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.29})$$

$$c_1^{(1)} = i(A_1 k + B_1 l) S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.30})$$

$$p_1^{(1)} = -\rho_1 \frac{(-\omega + U_1 k + V_1 l)^2}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.31})$$

$$\vec{j}_1^{(1)} = \nabla \times \vec{b}_1^{(1)} = \vec{0}, \quad (\text{B.32})$$

$$\nabla \times \vec{v}_1^{(1)} = \vec{0}, \quad (\text{B.33})$$

$$\phi_1^{(1)} = -i(-\omega + U_1 k + V_1 l) \frac{1}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.34})$$

$$\psi_1^{(1)} = -i(A_1 k + B_1 l) \frac{1}{\kappa} S_1 e^{-\kappa z} + c.c. \quad (\text{B.35})$$

Man erhält die Größen der unteren Teilströmung, indem man die entsprechenden konstanten Magnet- und Geschwindigkeitsfelder und $-\kappa$ mit κ ersetzt.

Die Feldgrößen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} u_2^{(1,2)} = & -\frac{ik}{\kappa} \left[\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{(1,2)} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{(1,2)} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (-\omega + U_{(1,2)} k + V_{(1,2)} l) \right. \\ & \cdot \left\{ \left(-z \frac{k}{\kappa} + \frac{l}{\kappa^2} \frac{l}{k} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \left(-z \frac{l}{\kappa} - \frac{l}{\kappa^2} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} \Big] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} \\ & + 2(-\omega + U_{(1,2)} k + V_{(1,2)} l) \left(\frac{k}{\kappa} S_2 + k S_1^2 \right) e^{2i\varphi} e^{-2\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.36}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2^{(1,2)} = & -\frac{il}{\kappa} \left[\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{(1,2)} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{(1,2)} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (-\omega + U_{(1,2)} k + V_{(1,2)} l) \right. \\ & \cdot \left\{ \left(-z \frac{k}{\kappa} - \frac{k}{\kappa^2} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \left(-z \frac{l}{\kappa} + \frac{k}{\kappa^2} \frac{k}{l} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} \Big] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} \\ & + 2 \frac{l}{\kappa} (-\omega + U_{(1,2)} k + V_{(1,2)} l) (S_2 + \kappa S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-2\kappa z} + c.c., \quad (\text{B.37}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_2^{(1,2)} = & \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right. \\
& \left. \mp z \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)}{\kappa} \right\} e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\
& + 2i(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l) (S_2 \pm \kappa S_1^2) e^{2i\phi} e^{(\mp 2\kappa z)} + c.c., \quad (B.38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2^{(1,2)} = & -\frac{ik}{\kappa} \left[A_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (A_{1,2}k + B_{1,2}l) \right. \\
& \cdot \left\{ \left(-z \frac{k}{\kappa} + \frac{l}{\kappa^2} \frac{l}{k} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \left(-z \frac{l}{\kappa} - \frac{l}{\kappa^2} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} \left. \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} \\
& + 2 \frac{k}{\kappa} (A_{1,2}k + B_{1,2}l) (S_2 + \kappa S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-2\kappa z} + c.c., \quad (B.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2^{(1,2)} = & -\frac{il}{\kappa} \left[A_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (A_{1,2}k + B_{1,2}l) \right. \\
& \cdot \left\{ \left(-z \frac{k}{\kappa} - \frac{k}{\kappa^2} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \left(-z \frac{l}{\kappa} + \frac{k}{\kappa^2} \frac{k}{l} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} \left. \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} \\
& + 2 \frac{l}{\kappa} (A_{1,2}k + B_{1,2}l) (S_2 + \kappa S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-2\kappa z} + c.c., \quad (B.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2^{(1,2)} = & \left[A_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (A_{1,2}k + B_{1,2}l) \right. \\
& \cdot \left\{ \mp z \frac{k}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + z \frac{l}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right\} \left. \right] e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\
& + 2i(A_{1,2}k + B_{1,2}l) (S_2 \pm \kappa S_1^2) e^{2i\phi} e^{(\mp 2\kappa z)} + c.c.. \quad (B.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_2^{(1,2)} = & \left\{ \mp \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\
& + (\kappa z \pm 1) \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \frac{-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l}{\kappa^3} \left. \right\} e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \\
& + i \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)}{\kappa} (\mp S_2 - \kappa S_1^2) e^{2i\phi} e^{(\mp 2\kappa z)} + c.c.. \quad (B.42)
\end{aligned}$$

$$p_2^{(1,2)} = i\rho_{1,2} \left[\pm \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V_{1,2} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right] \quad (B.43)$$

$$- (\kappa z \pm 1) \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2}{\kappa^2} \left(\frac{k}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + \frac{l}{\kappa} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \left. \right] e^{i\varphi} e^{\mp \kappa z} \quad (B.44)$$

$$-2\rho_{1,2} \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2}{\kappa^2} (\kappa^2 S_1^2 \pm \kappa S_2) e^{2i\varphi} e^{\mp 2\kappa z} + c.c. \quad (B.45)$$

$$-2\rho_{1,2} \frac{(-\omega + U_{1,2}k + V_{1,2}l)^2}{\kappa^2} e^{\mp 2\kappa z}. \quad (B.46)$$

Die Feldgrößen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}
u_3 = & \left[\left\{ \frac{k}{\kappa^2} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial X_1} \right\} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\
& + (-\omega + Uk + Vl) \frac{(z + \frac{1}{\kappa})}{\kappa^4} \\
& \cdot \left\{ \frac{3}{2} kl^2 \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + l(-2k^2 + l^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{k}{2} (k^2 - 2l^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} \right\} \\
& - z^2 \frac{k}{2\kappa^3} (-\omega + Uk + Vl) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial X_1} \right)^2 S_1 - \frac{ik}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& + i \frac{k}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \left\{ k \left(z - \frac{l^2}{k^2} \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right\} \\
& \left. + k(-\omega + Uk + Vl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (\text{B.47})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3 = & \left[\left\{ \frac{l}{\kappa^2} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial Y_1} \right\} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\
& + (-\omega + Uk + Vl) \frac{(z + \frac{1}{\kappa})}{\kappa^4} \\
& \cdot \left\{ \frac{l}{2} (l^2 - 2k^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + k(-2l^2 + k^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{3}{2} lk^2 \frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} \right\} \\
& - z^2 \frac{l}{2\kappa^3} (-\omega + Uk + Vl) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial X_1} \right)^2 S_1 - \frac{il}{\kappa} \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& + i \frac{l}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \left\{ l \left(z - \frac{k^2}{l^2} \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} + k \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_2} \right\} \\
& \left. + l(-\omega + Uk + Vl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (\text{B.48})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_3 = & \left[i \frac{z}{\kappa} \left\{ \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) + \frac{(-\omega + Uk + Vl)}{2\kappa^3} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left(l \frac{\partial}{\partial X_1} - k \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \right\} - i \frac{z^2}{2\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \left(k \frac{\partial}{\partial X_1} + l \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \\
& + \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} - \frac{z}{\kappa} (-\omega + Uk + Vl) \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& \left. + i\kappa (-\omega + Uk + Vl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (\text{B.49})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \left[\left\{ \frac{k}{\kappa^2} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial X_1} \right\} \left(A \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\
& + (Ak + Bl) \frac{(z + \frac{1}{\kappa})}{\kappa^4} \\
& \cdot \left\{ \frac{3}{2} kl^2 \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + l(-2k^2 + l^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{k}{2} (k^2 - 2l^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} \right\} \\
& - z^2 \frac{k}{2\kappa^3} (Ak + Bl) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial X_1} \right)^2 S_1 - \frac{ik}{\kappa} \left(A \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& + i \frac{k}{\kappa^2} (Ak + Bl) \left\{ k \left(z - \frac{l^2}{k^2} \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right\} \\
& \left. + k(Ak + Bl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (B.50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3 = & \left[\left\{ \frac{l}{\kappa^2} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial}{\partial Y_1} \right\} \left(A \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) \right. \\
& + (Ak + Bl) \frac{(z + \frac{1}{\kappa})}{\kappa^4} \\
& \cdot \left\{ \frac{l}{2} (l^2 - 2k^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + k(-2l^2 + k^2) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1 \partial Y_1} + \frac{3}{2} lk^2 \frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} \right\} \\
& - z^2 \frac{l}{2\kappa^3} (Ak + Bl) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial X_1} \right)^2 S_1 - \frac{il}{\kappa} \left(A \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& + i \frac{l}{\kappa^2} (Ak + Bl) \left\{ l \left(z - \frac{k^2}{l^2} \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} + k \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_2} \right\} \\
& \left. + l(Ak + Bl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (B.51)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 = & \left[i \frac{z}{\kappa} \left\{ \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) \left(A \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) + \frac{(Ak + Bl)}{2\kappa^3} \right. \right. \\
& \cdot \left. \left(l \frac{\partial}{\partial X_1} - k \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \right\} - i \frac{z^2}{2\kappa^2} (Ak + Bl) \left(k \frac{\partial}{\partial X_1} + l \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \\
& + A \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + B \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} - \frac{z}{\kappa} (Ak + Bl) \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& \left. + i \kappa (Ak + Bl) \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \right] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c., \quad (B.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 = & \left\{ \frac{\rho}{2\kappa^4} (2k^2 - l^2) (-\omega + Uk + Vl)^2 - 2Uk \frac{\rho}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \right\} \\
& \cdot \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1^2} + \left\{ \frac{\rho}{\kappa^4} (3kl) (-\omega + Uk + Vl)^2 \right. \\
& \left. - 2(Uk + Vl) \frac{\rho}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \right\} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1^2}{\partial X_1 \partial Y_1} \\
& + \left\{ \frac{\rho}{2\kappa^4} (2l^2 - k^2) (-\omega + Uk + Vl)^2 - 2Vl \frac{\rho}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl) \right\} \\
& \cdot \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \frac{\partial S_1^2}{\partial Y_1^2} + \frac{\rho}{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial T_1} + \frac{U\partial}{\partial X_1} + \frac{V\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 \\
& - \frac{2\rho}{\kappa^2} (-\omega + Uk + Vl)^2 \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) \left(\frac{k\partial}{\partial X_1} + \frac{l\partial}{\partial Y_1} \right) \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \\
& + \frac{z^2}{2\kappa^3} \rho (-\omega + Uk + Vl)^2 \left(k \frac{\partial}{\partial X_1} + l \frac{\partial}{\partial Y_1} \right)^2 S_1 + \frac{2i}{\kappa} \rho (-\omega + Uk + Vl) \\
& \cdot \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + V \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) - \frac{i\rho}{\kappa^2} \left(z + \frac{1}{\kappa} \right) (-\omega + Uk + Vl)^2 \left(k \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + l \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} \right) \\
& - \rho (-\omega + Uk + Vl)^2 \left(\frac{1}{2} \kappa |S_1|^2 S_1 + 3S_2 S_1^* \right) \Big] e^{i\varphi} e^{-\kappa z} \\
& - 4\rho (-\omega + Uk + Vl)^2 (\kappa |S_1|^2 S_1 + S_2^* S_1) e^{3i\varphi} e^{-\kappa z} + \dots + c.c. \quad (B.53)
\end{aligned}$$

B.3 Die Feldgrößen für Teilströmungen in Bousinesq-Näherung

Feldgrößen erster Ordnung

Die Felder der oberen Teilströmung lauten:

$$u_1^{(1,2)} = i(-\omega + U_1 k) \frac{m_1}{k} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.54)$$

$$w_1^{(1,2)} = i(-\omega + U_1 k) S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.55)$$

$$a_1^{(1,2)} = iAk \frac{m_1}{k} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.56)$$

$$b_1^{(1,2)} = iAk S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.57)$$

$$p_1^{(1,2)} = -i\rho(-\omega + U_1 k)^2 \frac{m_1}{k^2} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.58)$$

$$\tilde{\rho}_1^{(1,2)} = \frac{N^2 \rho}{g} S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + c.c., \quad (B.59)$$

$$\vec{j}_1^{(1,2)} = \frac{A}{\mu} (k^2 + m_1^2) S_1 e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \vec{e}_y + c.c. \quad (B.60)$$

Man erhält die Felder der unteren Teilströmung, indem man m_1 durch $-m_2$ und U_1 durch U_2 ersetzt.

Die Feldgrößen zweiter Ordnung

Die Felder der oberen Teilströmung in zweiter Ordnung lauten:

$$u_2^{(1)} = \left(\frac{\omega m_1}{k^2} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{(-\omega + U_1 k)}{k} \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} + \frac{m_1}{k} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \right) e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + \frac{n_1}{k} (-\omega + U_1 k) (iS_2 - m_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c., \quad (\text{B.61})$$

$$w_2^{(1)} = \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_1} + U_1 \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + 2(-\omega + U_1 k) (iS_2 - m_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c., \quad (\text{B.62})$$

$$a_2^{(1)} = -A_1 \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + A_1 n_1 (iS_2 - m_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c. \quad (\text{B.63})$$

$$c_2^{(1)} = A_1 \frac{\partial S_1}{\partial X_1} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + 2A_1 k (iS_2 - m_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c., \quad (\text{B.64})$$

$$p_2^{(1)} = \frac{\rho}{k^2} (-\omega + U_1 k) \left\{ -2\omega \frac{m_1}{k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} + (-\omega + U_1 k) \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} - 2m_1 \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + \frac{A_1^2}{2\mu_1} (k^2 + m_1^2) S_1^2 e^{2i\varphi} e^{-2im_1 z} - \frac{n_1}{k^2} \rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 (iS_2 - m_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c., - \left\{ \frac{A_1^2}{\mu_1} (k^2 + m_1^2) - 2 \frac{N_1^2 \rho_1 m_1^2}{k^2 + m_1^2} + N_1^2 \rho_1 \right\} |S_1|^2 \quad (\text{B.65})$$

$$\tilde{\rho}_2^{(1)} = \frac{N_1^2 \rho_1}{g} (S_2 + im_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} + c.c., \quad (\text{B.66})$$

$$\vec{j}_2^{(1)} = -iA_1 \left(m_1 \frac{\partial S_1}{\partial Z_1} - k \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right) e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \vec{e}_y + \frac{A_1}{\mu_1} (4k^2 + n_1^2) (S_2 + im_1 S_1^2) e^{2i\varphi} e^{-in_1 z} \vec{e}_y + c.c. \quad (\text{B.67})$$

Der Druck p_2 weist als einzige Feldgröße Nichtlinearitäten der Feldgleichungen und der Übergangsbedingungen auf. Der Anteil $\frac{A_1^2}{2\mu_1} (k^2 + m_1^2) S_1^2 e^{2i\varphi} e^{-2im_1 z}$ ist die Lorentzkraft der elektrischen Stromdichte \vec{j}_1 und der magnetischen Induktion \vec{b}_1 . In erster Ordnung verursacht die Lorentzkraft die Dichteschwankung $\tilde{\rho}_1$ mit, liefert aber keinen Beitrag zum Druck p_1 . Die von den schnellen Variablen unabhängigen Anteile $-\left\{ \frac{A_1^2}{\mu_1} (k^2 + m_1^2) - 2 \frac{N_1^2 \rho_1 m_1^2}{k^2 + m_1^2} + N_1^2 \rho_1 \right\} |S_1|^2$ stammen aus der dynamischen Übergangsbedingung zweiter Ordnung.

Die Koeffizienten der Grundwelle $e^{i\varphi} e^{-im_1 z}$ sind durch Ableitungen der Amplitude S_1 nach X_1, Z_1 und T_1 gegeben. Ist die Amplitude S_1 unabhängig von diesen Variablen der ε^{-1} -Skala, sind die Felder zweiter Ordnung frei von Wellenbewegungen der Grundwelle.

Die Dichteschwankung $\tilde{\rho}_2$ ist nur durch eine Wellenbewegung proportional zur

zweiten harmonischen gegeben, da der Koeffizient zur Grundwelle verschwindet:

$$\begin{aligned} & \frac{2i}{gk^2} \left\{ \left(\frac{A_1^2}{\mu_1} k^3 - \rho_1 (-\omega + U_1 k) (\omega m_1^2 + k^3 U_1) \right) \frac{\partial S_1}{\partial X_1} \right. \\ & \left. \left(m_1 \frac{A_1^2}{\mu_1} k^2 - \rho_1 (-\omega + U_1 k)^2 \right) \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} + (k^2 + m_1^2) \rho_{01} (-\omega + U_1 k) \frac{\partial S_1}{\partial T_1} \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \\ & = i \frac{\rho_1}{gk^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial S_1}{\partial T_1} - \frac{\partial F}{\partial k} \frac{\partial S_1}{\partial X_1} - \frac{\partial F}{\partial m_1} \frac{\partial S_1}{\partial Y_1} \right) e^{i\varphi} e^{-im_1 z}. \quad (\text{B.68}) \end{aligned}$$

Man erhält die Felder für die untere Strömung, wenn man m_1 durch $-m_2$, n_1 durch $-n_2$ und die entsprechenden Strömungsgrößen U , A und ρ ersetzt.

Die Feldgrößen dritter Ordnung

$$\begin{aligned} u_3 = & \left\{ \frac{\omega m_1}{k^2} \frac{\partial S_1}{\partial X_2} - \frac{(-\omega + U_1 k)}{k} \frac{\partial S_1}{\partial Y_2} + \frac{m_1}{k} \frac{\partial S_1}{\partial T_2} + \frac{m_1}{k} (-\omega + U_1 k) \right. \\ & \left. \left((m_1 - n_1) S_1^* S_2 + im_1 \left(\frac{3}{2} m_1 - n_1 \right) |S_1|^2 S_1 \right) \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + \frac{o_1}{k} (-\omega + U_1 k) \\ & \cdot \left\{ iS_3 - (m_1 + n_1) S_1 S_2 + im_1 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) S_1^3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} + c.c., \quad (\text{B.69}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_3 = & \left\{ \left(\frac{\partial S_1}{\partial T_2} + U_1 \frac{\partial S_1}{\partial X_2} \right) - (-\omega + U_1 k) (im_1 (3m_1 - 2n_1)) |S_1|^2 S_1 \right. \\ & \left. (m_1 - n_1) S_1^* S_2 \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} + 3(-\omega + U_1 k) \\ & \cdot \left\{ iS_3 - (m_1 + n_1) S_2 S_1 + im_1 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) S_1^3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} + c.c., \quad (\text{B.70}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = & A_1 \left\{ -\frac{\partial S_1}{\partial Z_2} + im_1^2 \left(\frac{3}{2} m_1 - n_1 \right) |S_1|^2 S_1 + m_1 (m_1 - n_1) S_1^* S_2 \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \\ & + A_1 o_1 \left\{ im_1 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) S_1^3 - (m_1 + n_1) S_1 S_2 + iS_3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} + c.c., \quad (\text{B.71}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 = & A_1 \left\{ \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + ikm_1 \left(\frac{3}{2} m_1 - n_1 \right) |S_1|^2 S_1 + k(m_1 - n_1) S_1^* S_2 \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \\ & + 3A_1 k \left\{ im_1 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) S_1^3 - (m_1 + n_1) S_1 S_2 + iS_3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} + c.c., \quad (\text{B.72}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_3 = & \left\{ \frac{\rho_1}{k^2} (-\omega + U_1 k) \left(-2\omega \frac{m_1}{k} \frac{\partial S_1}{\partial X_2} + (-\omega + U_1 k) \frac{\partial S_1}{\partial Z_2} - 2m_1 \frac{\partial S_1}{\partial T_2} \right) \right. \\
& + \frac{\rho}{k^2} (-\omega + U_1 k)^2 \left(-im_1^2 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) |S_1|^2 S_1 - m_1 (m_1 - n_1) S_1^* S_2 \right) \left. \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \\
& + \rho \frac{o_1}{k^2} (-\omega + U_1 k)^2 \left\{ -im_1 \left(\frac{m_1}{6} - n_1 \right) S_1^3 + (m_1 + n_1) S_1 S_2 - iS_3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} \\
& - \left\{ \frac{(2m_1^2 + m_1 n_1 + n_1^2)}{k^2} \rho (-\omega + U_1 k)^2 + (2k^2 - 2m_1^2 + n_1^2) \frac{A^2}{\mu} \right\} \\
& + (S_1^* S_2 + im_1 |S_1|^2 S_1) e^{i\varphi} e^{i(m_1 - n_1)z} \\
& \frac{1}{3} \left\{ -\frac{(2m_1^2 - 3m_1 n_1 + n_1^2)}{k^2} \rho (-\omega + U_1 k)^2 + (6k^2 + 2m_1^2 + n_1^2) \frac{A^2}{\mu} \right\} \\
& (S_1 S_2 + im_1 S_1^3) e^{3i\varphi} e^{-i(m_1 + n_1)z} + c.c., \quad (B.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_3 = & \frac{N_1^2 \rho_1}{g} \left\{ -i (m_1 - n_1) S_1^* S_2 + m_1 \left(\frac{1}{2} m_1 - n_1 \right) |S_1|^2 S_1 \right\} e^{i\varphi} e^{-im_1 z} \\
& + \frac{N_1^2 \rho_1}{g} \left\{ S_3 + i (m_1 + n_1) S_1 S_2 + m_1 \left(\frac{1}{6} m_1 - n_1 \right) S_1^3 \right\} e^{3i\varphi} e^{-io_1 z} + c.c. . \quad (B.74)
\end{aligned}$$

Man erhält die Felder für die untere Strömung, wenn man m_1 durch $-m_2$, n_1 durch $-n_2$, o_1 durch $-o_2$ und die entsprechenden Strömungsgrößen U , A und ρ ersetzt.

Symbolverzeichnis

Um die kleinen Störungen der magnetischen Induktion und des Geschwindigkeitsfeldes in den beiden Teilströmungen zu unterscheiden, werden da, wo es nötig ist, eingeklammerte hochstehende Indizes verwendet. Große lateinische Buchstaben stellen in der Regel Konstanten dar. Um diese Größen in den beiden Teilströmungen voneinander zu unterscheiden, werden untenstehende Indizes verwendet.

In der folgenden Tabelle sind die Symbole gelistet, deren Varianten der unterschiedlichen Störungsordnungen mit untenstehenden Indizes gekennzeichnet sind:

Symbol	Variante	Bedeutung
a	a_1, a_2, a_3	x -Komponente der magnetischen Induktion
b	b_1, b_2, b_3	y -Komponente der magnetischen Induktion
\vec{b}	$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$	magnetische Induktion
c	c_1, c_2, c_3	z -Komponente der magnetischen Induktion
\vec{j}	$\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$	elektrische Stromdichte
\vec{j}_T	$\vec{j}_{1T}, \vec{j}_{2T}$	elektrischer Oberflächenstrom
ϕ	ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3	Geschwindigkeitspotential
p	p_1, p_2, p_3	Druck
$\tilde{\rho}$	$\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3$	Massendichteschwankung
s	s_1, s_2, s_3	Auslenkung der Trennfläche
S	S_1, S_2, S_3	Amplitude der Auslenkung
σ	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Trennflächenladung
t	T_1, T_2	Zeitkoordinate
u	u_1, u_2, u_3	x -Komponente der Geschwindigkeit
v	v_1, v_2, v_3	y -Komponente der Geschwindigkeit
\vec{v}	$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$	Geschwindigkeit
w	w_1, w_2, w_3	z -Komponente der Geschwindigkeit
x	X_1, X_2	kartesische Koordinaten
y	Y_1, Y_2	kartesische Koordinaten
z	Z_1, Z_2	kartesische Koordinaten

Symbol	Variante	Bedeutung
a		Konstante
\vec{a}		konstanter Vektor
A	A_1, A_2, A_χ	konstante x -Komp. d. magnet. Induktion
A	A_1, A_2, A_T	Fläche
α	α_1, α_2	Winkel zwischen \vec{k} und \vec{V}
b	b_+, b_-	Konstante
\vec{b}		konstanter Vektor
B	B_1, B_2	konstante y -Komp. d. magnet. Induktion
\vec{B}	$\vec{B}^{(1)}, \vec{B}^{(2)}, \vec{B}_{12}$	magnetische Induktion
β	β_1, β_2	Winkel zwischen \vec{k} und \vec{B}
\vec{c}		konstanter Vektor
C	C_1, C_2	konstante z -Komp. d. magnet. Induktion
c_L		Lichtgeschwindigkeit im Vakuum
c_S		Schallgeschwindigkeit
\vec{c}_A	$\vec{c}_{A_1}, \vec{c}_{A_2}$	Alfvéngeschwindigkeit
$d\vec{A}$		Flächenelement
$d\vec{s}$	$d\vec{s}_T$	Wegelement
dV		Volumenelement
\vec{D}	$\vec{D}^{(1)}, \vec{D}^{(2)}$	elektrische Verschiebung
e		Elementarladung
\vec{e}_k	$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Einheitsvektoren
\vec{E}	$\vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}$	elektrisches Feld
ϵ		Permittivität
ϵ_0		elektrische Feldkonstante
ε		Entwicklungsparameter
F	$F_{B_1}, F_{B_2}, F_{B_T}$	implizite Dispersionsrelation
g	\hat{g}	Schwerkraft
\vec{g}		Schwerkraftvektor
G		Koeffizient
γ		Rayleigh-Taylor Winkel
γ	γ_1, γ_2	Winkel zwischen \vec{k} und \vec{e}_x
H		charakteristische Länge
\vec{H}	$\vec{H}^{(1)}, \vec{H}^{(2)}$	Magnetfeld

\mathbf{I}		Einheitstensor
\vec{j}	\vec{j}_K, \vec{j}_L	elektrische Stromdichte
\vec{j}_T, \vec{J}_T		Trennflächenstrom
κ	$\kappa_c, \kappa_{shr}, \kappa_{min}$	Betrag des Wellenvektors
\vec{k}		Wellenzahlvektor
k, K	k_c, k_{shr}, k_p, k_N	Wellenzahl in x -Richtung
l, L		Wellenzahl in y -Richtung
L		charakteristische Länge
η	η_V	dynamische Zähigkeit, Volumviskosität
φ	$kx + ly - \omega t$	Phase der ebenen Welle
λ	$\lambda_{\pm}, \lambda_{2d\pm}, \lambda_W, \lambda_B$	Landaukoeffizient
	$\lambda_{2dnk}, \lambda_{2dc}, \lambda_{2dW}$	
m, M	m_1, m_2, M_1, M_2	Wellenzahl in z -Richtung
n	n_1, n_2	Wellenzahl in z -Richtung
o	o_1, o_2	Wellenzahl in z -Richtung
μ	μ_1, μ_2, μ_χ	Permeabilität
ν	ν_{ei}, ν_{in}	Stoßfrequenz
\vec{n}		Normalenvektor
N	N_1, N_2	Brunt-Väisälä-Frequenz
P	P_1, P_2	Druck
q	q_e, q_i	spezifische Ladung
ρ	$\rho_1, \rho_2, \rho_e, \rho_i, \rho_0(z)$	Massendichte
σ		elektrische Leitfähigkeit
Σ		konstante Trennflächenladung
T		charakteristische Zeit
\vec{t}		Tangentialvektor
\mathbf{T}		Maxwellspannungstensor
T_σ	\hat{T}_σ	Oberflächenspannung
\vec{v}	$\vec{v}^{(1)}, \vec{v}^{(2)}, \vec{v}_e, \vec{v}_i$	Geschwindigkeitsfeld
\vec{v}_T		Geschwindigkeit der Trennfläche
U	U_1, U_2	x -Komp. der Geschwindigkeit
V	V_1, V_2	y -Komp. der Geschwindigkeit
\vec{V}	\vec{V}_D	Geschwindigkeitsfeld
W	W_1, W_2	z -Komp. der Geschwindigkeit
ω, Ω	$\omega_{\pm}, \hat{\omega}_{\pm}, \omega_{1,2,3}$	Kreisfrequenz
ω_A		Alfvénfrequenz
ω_p		Plasmafrequenz
ω_e		Zyklotronfrequenz der Elektronen
ω_i		Zyklotronfrequenz der Ionen

Literaturverzeichnis

- [1] Acheson, D.J., *On over-reflexion*, J. Fluid Mech., **77**, 433-472, 1976
- [2] Allis, William P., Buchsbaum, Solomon J. and Bers, Abraham, *Waves in Anisotropic Plasmas*, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1963
- [3] Alterman, Z., *Effect of Surface Tension on the Kelvin-Helmholtz Instability of two rotating Fluids*, Proc. N.A.S., **47**, 224-227, 1961
- [4] Alterman, Z., *Effect of Magnetic Field and Rotation on Kelvin-Helmholtz Instability*, Physics of Fluids, **4**, 10, 1207-1210, 1961
- [5] Alfvén, Hannes, *Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves*, Nature, **3802**, 3, 405-406, 1942
- [6] Alfvén, Hannes, *Cosmical Electrodynamics*, Oxford University Press, London, 1953
- [7] Arnoldus, Henk F., *Conservation of charge at an interface*, Optics Communications, 265, 52-59, 2006
- [8] Axford, W.I., *The Stability of Plane Current-Vortex Sheets*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. **XIII** Pt. 3, 1960
- [9] Axford, W.I., *Note on a Problem of Magnetohydrodynamic Stability*, Canadian Journal of Physics, Volume **40**, 1962
- [10] Becker, E. und Bürger, W., *Kontinuumsmechanik*, Teubner Verlag, Stuttgart, 1975
- [11] Benjamin, T.B. and Hasselmann, K., *Instability of Periodic Wavetrains in Nonlinear Dispersive Systems*, Proc. Roy. Soc. London. Series A., Vol. **299**, No. 1456, 59-76, 1967
- [12] Benjamin, T.B. and Feir, J.E., *The disintegration of wave trains on deep water*, J. Fluid Mech., **27**, 3, 417-430, 1967
- [13] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt 2001
- [14] Cap, Ferdinand F., *Handbook on Plasma Instabilities*, Volume 1, Academic Press, New York, 1976
- [15] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Oxford University Press. Chapter XI, 1961

- [16] Cowling, T.G., Magnetohydrodynamics, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957
- [17] Davidson, P.A., An Introduction to Magnetohydrodynamics, Cambridge University Press, 2001
- [18] Craik, A.D.D., Wave interactions and fluid flows, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
- [19] Drazin, P.G., *Kelvin-Helmholtz instability of finite amplitude*, J. Fluid Mech., **42**, 321-335, 1969
- [20] Elhefnawy, A.R.F. and Moatimid, G.M., *Nonlinear dynamics and stability of two streaming magnetic fluids*, Chaos, Solitons and Fractals, **12**, 1207-1216, 2001
- [21] Fejer, J.A., *Hydromagnetic wave propagation in the ionosphere*, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics, Vol. **18**, 135-146, 1960
- [22] Fejer, J.A., *Hydromagnetic Stability at a Fluid Velocity Discontinuity between Compressible Fluids*, Physics of Fluids, **7**, 4, 499-503, 1964
- [23] Fejer, J.A. and Miles, John W., *On the stability on a plane vortex sheet with respect to three-dimensional disturbances*, J. Fluid Mech., **15** 335-336, 1963
- [24] Foullon, C., Erwin Verwichte, Valery M. Nakariakov, Katariina Nykyri and Chales J. Farrugia, *Magnetic Kelvin-Helmholtz Instability at the Sun*, The Astrophysical Journal Letters, 2011
- [25] Jackson, John David, Klassische Elektrodynamik, de Gruyter, Berlin, 1981
- [26] Ji, H., Fox, W., Pace, D. and Rappaport, H.L., *Study of small-amplitude magnetohydrodynamic surface waves on liquid metal*, Physics of Plasmas, **12**, 2005
- [27] Gerthsen C., Gerthsen Physik, 21. Auflage, Springer Verlag, Berlin 2002
- [28] Gerwin, R., *Hydromagnetic Surface Waves in a Conducting Liquid Surrounded by a Compressible Gas*, Physics of Fluids, **10**, 1958-1988, 1967
- [29] Gerwin, R., *Stability of the Interface between two Fluids in Relative Motion*, Review of Modern Physics, **40**, 3, 652-658, 1968
- [30] Goldston, Robert J. and Rutherford, Paul H., Plasmaphysik - Eine Einführung, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft
- [31] Helmholtz, Hermann von, *Ueber discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen*, in Wissenschaftliche Abhandlungen, **146**, J.A. Barth, Leipzig, 1882
- [32] Helliwell, R.A., Whistlers and Related Ionospheric Phenomena, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1965
- [33] Kant, R. and Malik, S.K., *Nonlinear Waves in superposed Fluids*, Astrophysics and Space Science, **86**, 345-360, 1982

- [34] Kant, R. and Malik, S.K., *Nonlinear Waves in superposed magnetic fluids*, Physics of Fluids, **28**, 12, 3534-3527, 1985
- [35] Karplus, R., *Absorption of magnetohydrodynamic Waves in the lower Ionosphere*, in Plasma Hydromagnetics, ed. Daniel Bershadler, Stanford University Press, Stanford, Calif., 83-96, 1962
- [36] Khater, A.H., Callebaut, D.K. and Seadawy, A.R. *Nonlinear Dispersive Instabilities in Kelvin-Helmholtz Magnetohydrodynamic Flows*, Physica Scripta **67**, 340-349, 2003
- [37] Khater, A.H., Callebaut, D.K., Seadawy, A.R. and Hady, A., *Kelvin-Helmholtz instability in magnetohydrodynamic flows*, Proceedings of the International Astronomical Union, **2**, 49-52, 2006
- [38] Khater, A.H., Callebaut, D.K. and Seadawy, A.R., *Kelvin-Helmholtz instability in MHD flows*, Proceedings of the International Astronomical Union, **2**, 313-315, 2006
- [39] Kirtskhalia, V.G., *On the stability problem of the tangential discontinuity*, Planet Space Sciene, **42**, 6, 513-518, 1994
- [40] Lord Kelvin, *Influence of Wind and Capillarity on Waves in Water supposed frictionless*, Mathematical and Physical Papers, **4**, 76-85, 1882
- [41] Kruskal, M. und Schwarzschild, M., *Some instabilities of a completely ionized plasma*, Proc. Roy. Soc., **A223**, 348, 1954
- [42] Landau, L.D., *Stability of tangential Discontinuities in compressible Fluid*, Doklady, Volume XLIV, **4**, 1944
- [43] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Electrodynamics of Continous Media*, Pergamon Press Inc. New York, 1960, pp. 227-229
- [44] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Hydrodynamics*, Pergamon Press Inc. New York, 1980, pp. 227-229
- [45] Lehnert, B., *Magneto-Hydrodynamic Waves in Liquid Sodium*, The Physical Review, **94**, No. 4, 815-824, 1954
- [46] Lehnert, B., *An Instability of Laminar Flow of Mercury Caused by an External Magnetic Field*, Proc. Roy. Soc. London. A., **233**, No. 1194, 299-302, 1955
- [47] Lehnert, B., *Magnetohydrodynamics Waves under the action of the coriolis force*, The Astrophysical Journal, **119**, 647-654, 1954
- [48] Lindzen, Richard S., *Stability of a Helmholtz Velocity Profile in a Continuously Stratitfied, Infinite Boussinesq Fluid - Applications to Clear Air Turbulence*, Center for Earth and Planetary Physics, Harvard University, Cambridge, Mass. 02138, 1974
- [49] Lortz, Dietrich, *Magntohydrodynamik*, BI-Wissenschaftsverlag Mannheim, 1992

- [50] Lundquist, *Experimental Investigations of Magneto-Hydrodynamic Waves*, Physical Review, **76**, 12, 1805-1809, 1949
- [51] Malik, S.K. and Singh. M., *Nonlinear Kelvin-Helmholtz Instability in Hydromagnetics*, Astrophysics and Space Science, **109**, 231-239, 1985
- [52] Malik, S.K. and Singh. M., *Finite amplitude Kelvin-Helmholtz instability in magnetic fluids*, Phys. Fluids, **29**, 2853-2859, 1986
- [53] Maslowe, S.A. and Kelly, R.E., *Finite amplitude oscillations in a Kelvin-Helmholtz flow*, Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol **5**, 427-435, 1970
- [54] Masters, A. et al., *Cassini observations of a Kelvin-Helmholtz vortex in Saturn's outer magnetosphere*, J. Geophys., **115**, A07225, 2010
- [55] McKenzie, J.F. and Axford, W.I., *Hydrodynamic Gravity Waves in the solar Atmosphere*, The Astrophysical Journal, **537**, 516-523, 2000
- [56] Melcher, James R., *Electrohydrodynamic and Magnetohydrodynamic Surface Waves and Instabilities*, Physics of Fluids, **4**, 11, 1348 - 1354, 1961
- [57] Michael, D.H., *The Stability if a combined Current and Vortex Sheet in a perfectly conducting Fluid*, Proc. Camb. Phil. Soc., **51**, 528-532
- [58] Miles, J.W., *On the generation of surface waves by shear flows*. J. Fluid Mechanics, **3**, 185 , 1957
- [59] Miles, J.W., *On the generation of surface waves by shear flows. Part 2*, J. Fluid Mech., **6**, 568-582, 1959
- [60] Miles, J.W., *On the generation of surface waves by shear flows. Part 3: Kelvin-Helmholtz instability*, J. Fluid Mech., **6**, 583-598, 1959
- [61] Nayfeh, A.H. and Saric, W.S., *Non-linear Kelvin-Helmholtz instability*, J. Fluid Mech., **46**, 2, 209-231, 1971
- [62] Nayfeh, A.H. and Saric, W.S., *Non-linear waves in a Kelvin-Helmholtz flow*, Journal of Fluid Mechanics, **55**, 2, 311-327, 1972
- [63] Nayfeh, A.H., *Nonlinear Interactions: analytical, computational, and experimental methods*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000
- [64] Northrop, Theodore G., *Helmholtz Instability of a Plasma*, Physical Review, **103**, 5, 1150-1154, 1956
- [65] Ong, R.S.B. and Roderick, N., *On the Kelvin-Helmholtz Instability of the Earth's Magnetopause*, Planet Space Sci., **20**, 1-10, 1972
- [66] Peregrine, D.H., *Water Waves, Nonlinear Schrödinger Equations and their solutions*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, **25**, 16-43, 1983
- [67] Platon, Kratylus, übersetzt von F. Schleiermacher in: Platon, Sämtliche Werke, Band 3, rowohlts enzyklopädie im Rowohlt Taschenbuch Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2013

- [68] Pu, Z. and Kivelson, Margaret G., *Kelvin-Helmholtz Instability at the Magnetopause: Solution for Compressible Plasmas*, Journal of Geophysical Research, Vol. **88**, A2, 841-853, 1983
- [69] Prechtel, A., *Ein Beitrag zur Behandlung von Flächengrößen und Sprungbedingungen der nichtrelativistischen Elektrodynamik bewegter Körper*, Archiv für Elektrotechnik, **60**, 55-61, 1978
- [70] Reynolds, O., Papers on Mechanical and Physical Subjects, Vol.3, The Submechanics of the Universe, Cambridge University Press, Cambridge, 1903
- [71] Sen, Amiya K., Stability of Hydromagnetic Kelvin-Helmholtz Discontinuity, Physics of Fluids, **6**, 8, 1154-1163, 1963
- [72] Sen, Amiya K., *Effect of Compressibility on Kelvin-Helmholtz Instability in a Plasma*, Physics of Fluids, **7**, 8, 1293-1298, 1964
- [73] Singh, M., Khosla, H.K. and Malik, S.K., *Nonlinear dispersive instabilities in Kelvin-Helmholtz MHD Flows*, J. Plasma Physics, **59** part 1, 27-37, 1996
- [74] Southwood, D. J., *The Hydromagnetic Stability of the Magnetospheric Boundary*, Planet Space Sci., Vol. **16**, 587-605, 1968
- [75] Spürk, J.H., Strömungslehre, Springer-Verlag, Heidelberg 1987
- [76] Tabaei, A. and Akylas, T.R., *Nonlinear internal gravity wave beams*, J. Fluid Mechanics, **482**, 141-161, 2003
- [77] Taylor, G.I., *Effect of Variation in Density on the Stability of Superposed Streams of Fluid*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol. **132**, 499-532, 1931
- [78] Todd, L., *Stability of a Tangential Discontinuity in an Incompressible Conducting Fluid*, Physics of Fluids, **9**, 814-815, 1966
- [79] Turner, J.S., Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge University Press, London 1973
- [80] Vedenov, A. A., Theory of Turbulent Plasma, Iliffe Books Ltd., London, 1968
- [81] Woods, L. C., Physics of Plasmas, Wiley-Vch Verlag, Weinheim, 2004
- [82] Weissman, M. A., *Nonlinear Wave Packets in the Kelvin Helmholtz Instability*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences, Vol. **290**, No. 1377, 639-681, 1979
- [83] Weiss, N.O., *The Expulsion of Magnetic Flux by Eddies*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. **293**, No. 1434, 310-328, 1966
- [84] Zakaria, Kadry, *Nonlinear dynamics of magnetic fluids with a relative motion in the presence of an oblique magnetic field*, Physica A, **327**, 221-248, 2003
- [85] Das große Buch der Zitate und Redewendungen, Dudenverlag, Mannheim, 2007

Lebenslauf

Walter Brett

- | | |
|------------|---|
| 17.01.1983 | geboren in Frankfurt am Main
als Sohn der Eheleute
Dr. Michael R. Brett
und Angelika Minke-Brett, geb. Minke |
| 1989-1993 | Besuch der Albrecht-Dürer-Schule
in Frankfurt |
| 1993-1999 | Besuch der Helene-Lange-Schule
in Frankfurt Höchst |
| 1999-2002 | Besuch des Friedrich-Dessauer-Gymnasiums
in Frankfurt Höchst |
| 12.06.2002 | Abitur |
| 2003-2009 | Studium der Physik
an der Technischen Universität Darmstadt |
| 25.03.2009 | Physik-Diplom |
| 2009-2013 | Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Doktorand
am Institut für Festkörperphysik |
| 27.06.2010 | Geburt meiner Tochter Lena |
| 11.05.2013 | Eheschließung mit Frau Natali Brett, geb. Becker |